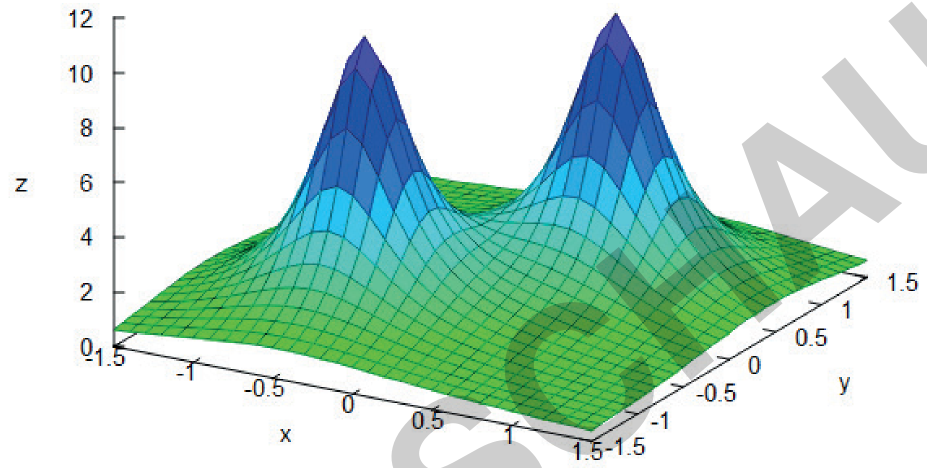
Elektrizitätslehre und Magnetismus

Von der zweiten zur dritten Dimension – Darstellung elektrischer Felder durch Potentialgebirge

Dr. Christoph Neugebauer, Bonn; Dr. Hannes Stoppel, Gelsenkirchen
Illustrationen von Benjamin Streit



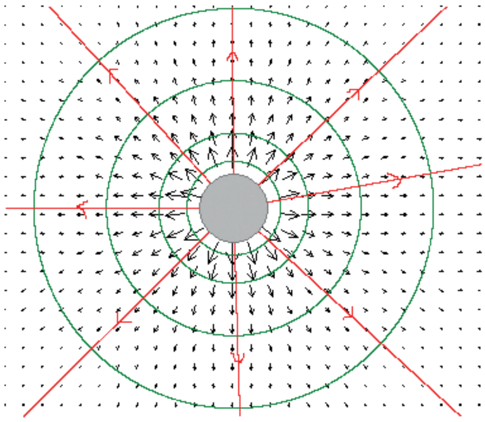
Der elektrische Strom ist aus unserer modernen Welt nicht mehr wegzudenken. Jeden Tag nutzen wir ihn und sind auf ihn angewiesen. Doch was kommt da eigentlich aus der Steckdose? Warum funktioniert damit ein Föhn? Warum geht Gefahr von elektrischem Strom aus? In dieser Unterrichtseinheit wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich Schülerinnen und Schüler selbstständig grundlegende physikalische Begriffe erarbeiten können. Dabei wird differenziert und anschaulich mit Bewegungs- und Denkmodellen gearbeitet, um den elektrischen Strom begreifbar zu machen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11./12. Klasse (Qualifikationsphase)
Dauer:	11 bis 15 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Modelle inklusive ihrer Grenzen erkennen, gezielte Anwendung von CAS und GTR in der Physik zur Anwendung von Modellen
Thematische Bereiche:	Elektrische Ladungen und Felder, 2- und 3-dimensionale Darstellung des Potentials elektrischer Felder, Anwendung von CAS oder GTR in der Physik
Medien:	Texte, grafische Darstellungen, CAS oder GTR

Feld im Abstand von einem Teilchen M 1

Jeder stromdurchflossene Leiter ist von einem elektrischen Feld umgeben, das sich so darstellen lässt wie im Bild rechts (© Patrick Nordmann).



Es lassen sich Aussagen über die Kraftwirkung sowohl auf positiv als auch auf negativ geladene Teilchen machen.
Die Stärke E eines elektrischen Feldes wird über die auf einen Ladungsträger wirkende Kraft definiert. Um eine (punktförmige) Ladung q herum befindet sich ein radialsymmetrisches elektrisches Feld, genannt *Radialfeld*. Die Feldstärke eines Radialfelds lässt sich als Funktion in Abhängigkeit vom Abstand r von der Ladung notieren lässt:

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

Aufgabe 1

Der Durchmesser eines freien Protons beträgt etwa $d_p=1{,}7\cdot10^{-15}$ m, seine Ladung ist etwa gleich $q_p=1{,}6\cdot10^{-19}$ C. Die elektrische Feldkonstante ist gleich $\varepsilon_0=8{,}8554\cdot10^{-12}\frac{(As)^2}{Nm^2}$.

a) **Berechnen** Sie die Feldstärke des elektrischen Feldes in Abhängigkeit vom Abstand von 1 pm, 100 nm, 10 nm, 1 nm vom Rand eines Protons. **Ziehen** Sie Konsequenzen für die Wahl des Koordinatensystems für eine grafische Darstellung der Feldstärke in Abhängigkeit des Abstands vom Kern.

b) **Zeichnen** Sie mithilfe eines GTR oder CAS einen Funktionsgraphen von $E(r)$. Setzen Sie dabei die Ladung $q=1{,}6$ und **interpretieren** Sie sie als die Ladung $q_p=1{,}6\cdot10^{-19}$ C des Protons. Die Feldkonstante sei $\varepsilon=8{,}854$ und soll damit $\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}\frac{(As)^2}{Nm^2}$ entsprechen.

Berechnen Sie für diese Werte den Umrechnungsfaktor für die Einheit der E-Achse des Koordinatensystems.

c) Der Funktionsgraph von E läuft für $r\to0$ gegen unendlich. **Erklären** Sie dieses Verhalten. **Nehmen** Sie dabei Bezug auf den Durchmesser des Protons.

d) **Zeichnen** Sie einen Graphen der Feldstärke E für $E\in[-5;5]$. Interpretieren Sie den Graphen.

e) **Ziehen** Sie aus den Ergebnissen von Aufgabenteil b) bis d) Rückschlüsse auf die Reichweite eines elektrischen Feldes um ein Proton.

f) **Verändern** Sie die bisher verwendete Funktion E so, dass Sie r^2 im Nenner durch $r^2+0{,}1$ ersetzen. Damit ergibt sich die Funktion E_2 mit

$$E_2(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+0{,}01}$$

Betrachten Sie den Graphen der Funktion E_2 und vergleichen ihn mit dem Graphen der Funktion E. Setzen Sie sich in Zweiergruppen zusammen und diskutieren Sie, ob und wie weit sich das elektrische Feld um eine Ladung durch die Funktion E_2 beschreiben lässt. Sammeln Sie Pro und Kontra.

M 2 Tippkarten zu M 1

Tippkarte 1 zu Aufgabe 1 b) von M 1

$\frac{10^{-12}}{10^{-19}} = 10^7$ beziehungsweise $\frac{10^{19}}{10^{12}} = 10^7$

Tippkarte 2 zu Aufgabe 1 b) von M 1

$r \geq 0$ wird in Metern angegeben
Setzen Sie konkrete Werte in die Funktion E ein.

Tippkarte 1 zu Aufgabe 1 c) von M 1

Da ein Teilchen einen Radius größer als null besitzen, kann der Fall r = 0 zur Betrachtung der Struktur eines Feldes vernachlässigt werden.

Tippkarte 1 zu Aufgabe 1 f) von M 1

Die grundlegende Struktur des Feldes wird durch die Addition einer kleinen Zahl im Nenner nicht verändert.

Tippkarte 2 zu Aufgabe 1 f) von M1

Durch 0 kann nicht dividiert werden, denn es gilt $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$.

Das Potential des Radialfeldes

M 3

Unser Ziel ist es, Energiezustände in der Umgebung geladener Körper wie Protonen und Elektronen zu untersuchen. Eine Änderung von Energiezuständen entspricht einer Bewegung durch ein elektrisches Feld. Sinnvoll erscheint es, den freien Zustand im (Welt-)Raum als Nullpunkt zu setzen. Damit definiert man das *Potential* φ zur Berechnung von Energiezuständen über Veränderungen der Feldstärke des elektrischen Feldes.

Aufgabe 1

Nach der obigen Beschreibung stehen in einem Radialfeld die elektrische Feldstärke und das elektrische Potential in Beziehung zueinander, da Veränderungen des Potentials im Zusammenhang zu Veränderungen der Feldstärke stehen.

a) **Zeigen** Sie, dass die Definition

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

für eine Ladung q und den Abstand r vom Zentrum des Ladungsträgers diese Bedingung erfüllt. **Gehen** Sie bei Ihren Überlegungen auch auf Einheiten ein.

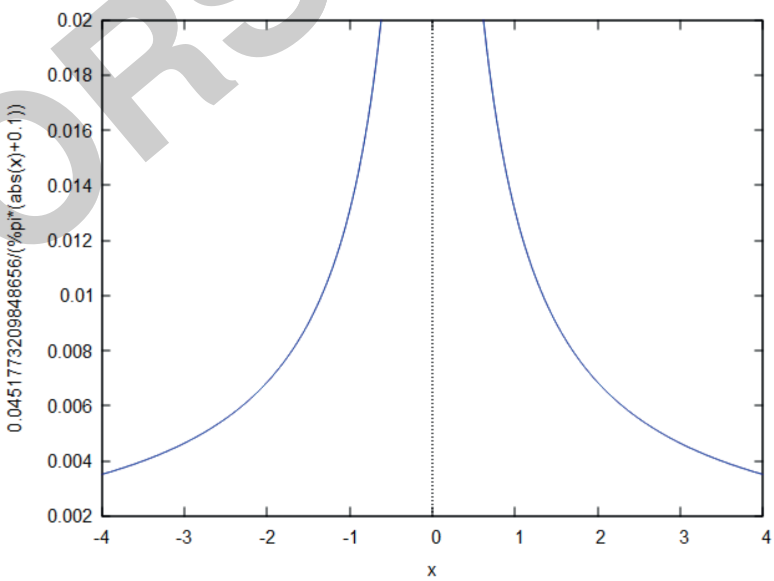
b) **Berechnen** Sie das Potential mit den Werten aus Aufgabe 1 a) von Arbeitsblatt **M 1** und zeichnen Sie einen Graphen der Funktion φ. Vergleichen Sie die Ergebnisse für das Potential und die Feldstärke miteinander. Erklären Sie die Zusammenhänge.

c) Wie auch bei der grafischen Darstellung der elektrischen Feldstärke soll das elektrische Potential in entgegengesetzte Richtungen von einer Ladung aus betrachtet werden. **Begründen** Sie, dass dies mithilfe der folgenden Funktion φ möglich ist:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{|r| + 0{,}1}$$

Aufgabe 2

Ein Funktionsgraph der Funktion φ zur Beschreibung des Potentials ist für $\varepsilon = 8{,}854$ und $q = 1{,}6$ in der folgenden Abbildung zu sehen.



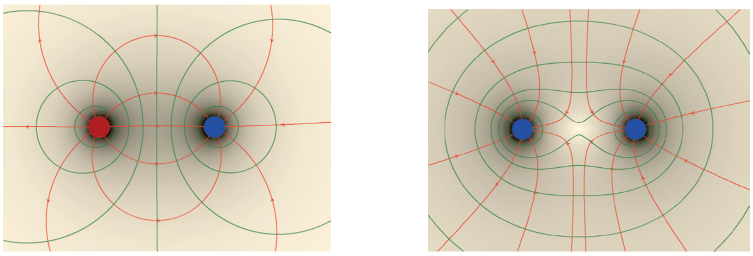
a) **Beschreiben** Sie Zusammenhänge zwischen dem Graphen der Funktion E und der Abbildung des Feldes oben. Wo lassen sich in der Abbildung oben die Amplitude der Funktion und die Größe ihrer Veränderung erkennen?

b) Die Skizze in **M 1** oben ist zweidimensional, der Graph des Computers ist lediglich eindimensional. **Erklären und begründen** Sie, wie sich mithilfe des Funktionsgraphen das Feld vollständig beschreiben lässt.

Gemeinsame Felder zweier Ladungsträger

M 4

Auf Blatt **M 2** wurde das elektrische Potential um ein Proton herum untersucht. Häufig jedoch finden sich mehrere Teilchen gleicher oder entgegengesetzter Ladung in Nähe voneinander. Zur Untersuchung des elektrischen Potentials elektrischer Felder um zwei und mehr geladene Körper beschränken wir uns zunächst auf das Potential auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Ladungsträgern. Die folgende Abbildung zeigt Bilder zweier Felder um zwei entgegengesetzt (links) und gleich (rechts) geladene Körper.



© Patrick Nordmann

Aufgabe 1

Beschreiben und erklären Sie den Aufbau und entsprechende Eigenschaften des Feldes. **Gehen** Sie dabei jeweils auf die Relationen der Ladungen zueinander sowie die Kraft auf geladene Körper ein. Welche Linien geben die Struktur des elektrischen Potentials an und welches sind die Feldlinien des elektrischen Feldes.

In Aufgabe 1 wurde eine Interpretation eines experimentell erzeugten elektrischen Feldes durchgeführt. Dabei konnte keine qualitative Argumentation vorgenommen werden. Analog zum Aufgabenblatt **M 3** lassen sich aber Aussagen über das Potential des Feldes mithilfe einer Funktion machen, wie in den folgenden Aufgaben untersucht wird.

Aufgabe 2

Zwei Ladungen q_1 und q_2 befinden sich in einem Abstand r voneinander.

a) **Leiten** Sie mithilfe der Ergebnisse von Aufgabe 1 auf Arbeitsblatt **M 3** die Funktion zur Beschreibung des Potentials zweier Ladungsträger der Ladungen q_1 und q_2 auf der geraden Verbindung zueinander grafisch her. **Berücksichtigen** Sie dabei auch den Abstand der Ladungsträger zueinander. **Erklären und begründen** Sie Ihr Vorgehen.

b) **Wählen** Sie für die Ladungen des Protons $q_1 = q_2 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C und einen Abstand von $r = 1$. **Beschreiben und erklären** Sie die Struktur des Feldes. Gehen Sie dabei auf die Struktur des Feldes ein.

c) **Führen** Sie die Simulation auch für unterschiedliche Ladungen q_1 und q_2 durch. **Beschreiben und erklären** Sie jeweils den Aufbau des Feldes.

d) **Ergänzen** Sie das Verfahren aus Teil c) dadurch, dass Sie auch den Abstand der Teilchen voneinander variieren. **Legen** Sie dabei den Ursprung des Koordinatensystems in die Mitte zwischen beide Ladungen. **Diskutieren** Sie in Zweiergruppen über Vorteile und Nachteile gegenüber den bisherigen Graphen.

e) **Betrachten** Sie die Felder für unterschiedliche Ladungen. **Untersuchen** Sie die Felder dabei auch auf *Steigung*, *Wendestellen*, *Symmetrie*, *Nullstellen*.

f) **Vergleichen** Sie die Ergebnisse aus den Teilen a) bis e) mit den Ergebnissen von Aufgabe 1. **Erklären** Sie den Aufbau des obigen Bildes mithilfe der Ergebnisse der Aufgabenteile a) bis d).

M 7 Von zwei Dimensionen zu drei Dimensionen

Wie sich auf Arbeitsblatt **M 5** zeigte, stoßen wir bei der Untersuchung des Potentials elektrischer Felder an die Grenzen, wenn wir mehr als zwei Teilchen und ihre Felder gleichzeitig betrachten möchten. Selbst für zwei Teilchen stieß die Beschreibung mithilfe eines zweidimensionalen Graphen an die Grenzen. Den Schwächen der bisherigen Verfahren zur Feldbetrachtung werden wir hier entgegenwirken und unseren Blickwinkel um eine Dimension erweitern. Wir möchten also für Punkte $(x|y)$ in der Ebene das Potential $\varphi(x;y)$ berechnen.

Aufgabe 1

Bislang haben wir das Potential des Feldes einzelner geladener Objekte wie Teilchen der Ladung q in einem Abstand r durch $\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$ beschrieben. Betrachten Sie die Funktion φ mit

$$\varphi(x;y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Begründen Sie, dass auch diese Funktion eine Berechnung des Potentials eines elektrischen Feldes ermöglicht. **Erklären** Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den beiden Beschreibungen des elektrischen Potentials.

Aufgabe 2

Durch die in Aufgabe 1 definierte Funktion φ lässt sich das elektrische Potential an einem Punkt $(x|y)\in\mathbb{R}^2$ in der Ebene beschreiben.

a) **Stellen** Sie diese Funktion in einem dreidimensionalen Graphen für $x\in[-1{,}5;1{,}5]$, $y\in[-1{,}5;1{,}5]$ und $z\in[0;0{,}1]$ dar. **Erklären** und deuten Sie seinen Aufbau auch von physikalischer Seite. **Greifen** Sie dabei auch auf das Ergebnis von Arbeitsblatt M 3 zurück.

An der in Abbildung 1 definierten Funktion φ zur Beschreibung des Feldes nehmen wir eine geringfügige Veränderung vor:

$$\varphi(x;y)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+0{,}1}}.$$

b) **Stellen** Sie das Feld analog zu Teil a) grafisch dar. **Beschreiben und erklären** Sie die Unterschiede zwischen diesem Graphen und dem Graph der oben definierten Funktion ohne diesen Summanden (+0,1) im Nenner. **Erklären** Sie, dass die Veränderungen gegenüber Teil a) nicht unbedingt mit starken Fehlern der Beschreibung des Feldes behaftet sind.

c) **Verändern** Sie die Ladungen in ihrer Stärke und ihrem Vorzeichen. **Deuten** Sie Ihre Beobachtungen an den 3-D-Graphen.

d) **Betrachten** Sie die Graphen aus den Teilen b) und c) aus der z-Richtung. **Erklären** Sie den Graphen aus dieser Blickrichtung. Wägen Sie diese Darstellung gegenüber der Darstellung aus den Aufgabenteilen b) und c) ab.

e) wxMaxima: **Geben** Sie unter wxMaxima den Befehl

```
wxcontour_plot(phi(x,y), [x,–0.2,0.2], [y,–0.2,0.2])$
```

ein. **Erklären** Sie den Aufbau des Graphen und vergleichen ihn mit den Graphen aus den Aufgabenteilen b) bis d). **Ziehen** Sie Rückschlüsse auf die Symmetrie des Feldes.

M 4a Graphen mit drei Dimensionen (1)

Der Befehl „plot2d“ ließ schon erahnen, dass auch die Möglichkeit für dreidimensionale Graphen mit „plot3d“ existiert. Solche Graphen werden wir jetzt untersuchen. Es kann sein, dass Ergebnisse nicht nur von einer, sondern von mehreren Voraussetzungen abhängen. Sie kennen dies bereits aus Funktionenklassen. Der dort auftretende Parameter lässt sich als zweite Variable auffassen. Betrachten wir dies von der mathematischen Seite, so bedeutet dies, dass Funktionen mit mehr als einer Variablen existieren. Gegeben sei eine Funktion f, die zwei Variablen x und y über reelle Zahlen und Funktionswerte in den reellen Zahlen hat, d. h., dass einem Punkt $(x|y) \in \mathbb{R}^2$ ein Wert $f(x;x) \in \mathbb{R}$ zugeordnet wird, z. B.

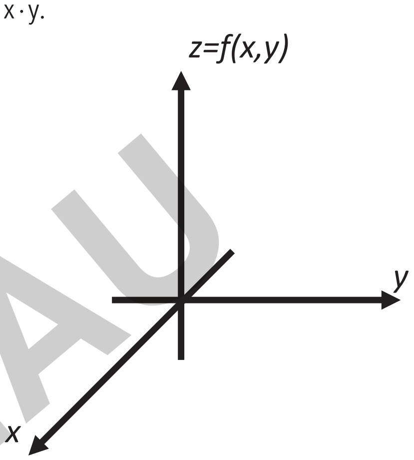
$$f : \mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y.$$

In wxMaxima wird diese Funktion durch

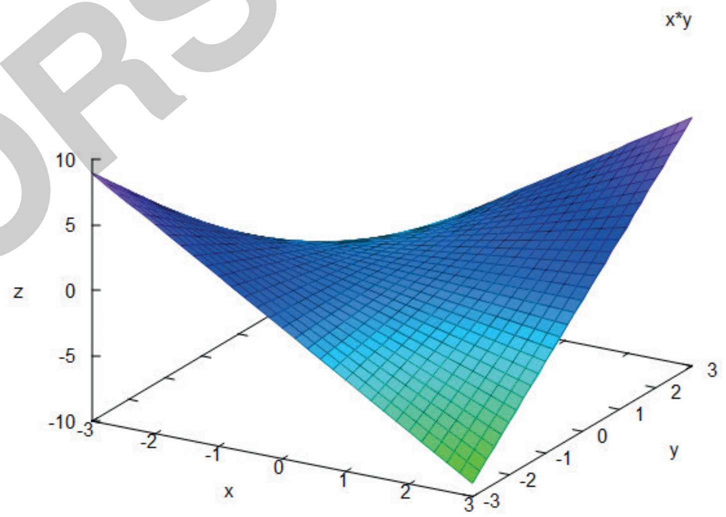
```
f(x,y):=x*y$
```

definiert. Die Funktionswerte werden dann auf der z-Achse abgetragen, und wir erhalten einen Graphen von Punkten $(x|y|f(x,y))$ im dreidimensionalen Raum.

Möchte man eine Funktion in Abhängigkeit von zwei Variablen grafisch darstellen, so funktioniert dies dreidimensional:



Es kann sein, dass man für x und y jeweils reelle Zahlen von -3 bis 3 in f einsetzen kann, der Definitionsbereich also $\mathbb{D}_f = [-3;3] \times [-3;3]$ ist und der Graph folgendermaßen aussieht:



Dieser Graph kann unter wxMaxima durch Eingabe von

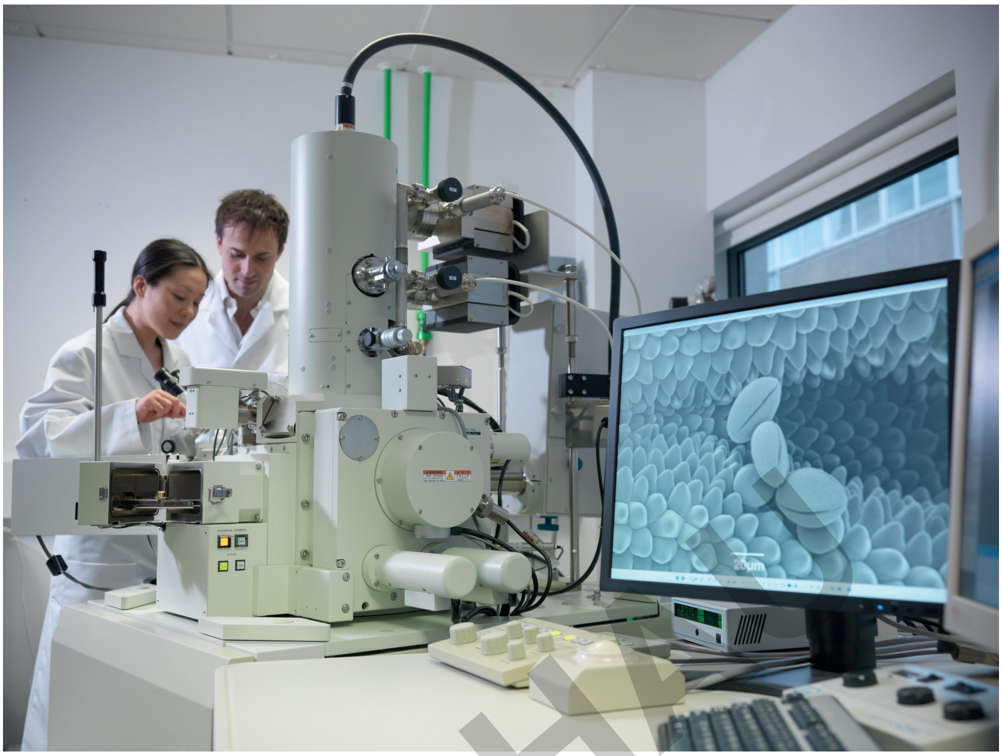
```
wxplot3d(f(x,y),[x,–3,3],[y,–3,3],[z,–10,10]);
```

oder, wie auch unter Maxima möglich, durch Eingabe von

```
plot3d(f(x,y),[x,–3,3],[y,–3,3],[z,–10,10]);
```

erstellt werden.

Abbildungen eines Elektronenmikroskops



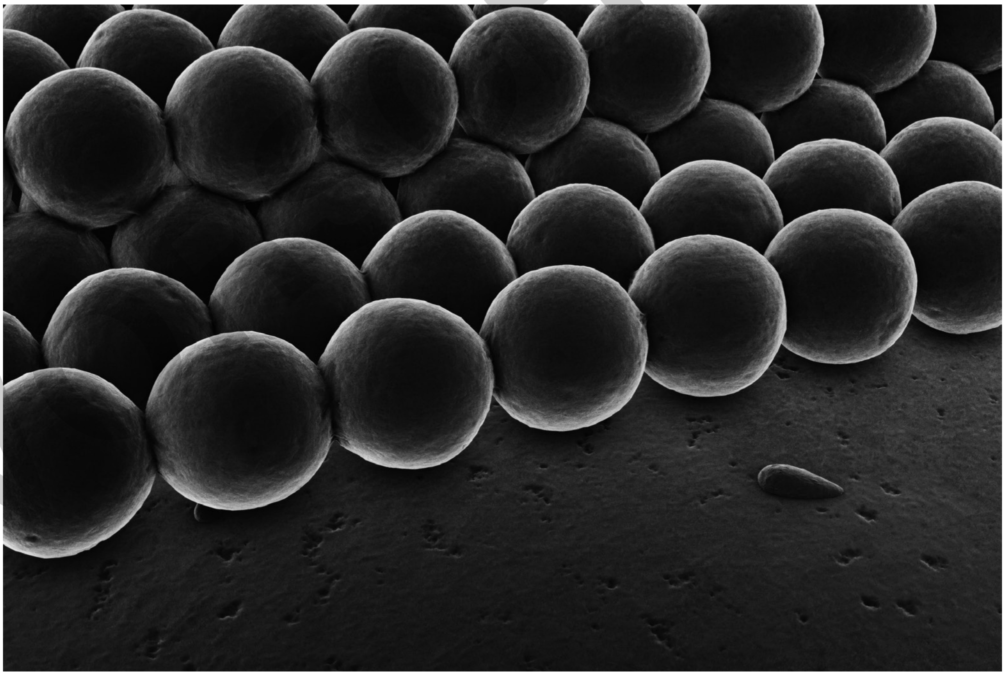


Abbildung oben: © Monty Rakusen/Image Source, unten: © fpm/E+

Hinweise und Lösungen

M 1 Feld im Abstand eines Teilchens – Lösungen und Erläuterungen

Um auf Bekanntes zurückzugreifen, wird mit der Betrachtung elektrischer Felder begonnen. Dabei werden Grundgedanken des elektrischen Feldes wiederholt.

Aufgabe 1

a) Damit man die in der Aufgabenstellung angegebenen Abstände vom Rand des Protons in die Formel einsetzen kann, muss der Radius des Protons in die Formel eingebaut werden:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r + \frac{d_p}{2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}8554 \cdot 10^{-12} \frac{(As)^2}{Nm^2}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}{(r + 0{,}85 \cdot 10^{-15}\,m)^2}$$

$$E(1\,pm) = 1{,}435 * 10^{15}\,\frac{N}{C},\ E(100\,nm) = 143.781{,}14\,\frac{N}{C},$$

$$E(10\,nm) = 14.378.111{,}98\,\frac{N}{C},\ E(1\,nm) = 1{,}438 * 10^{9}\,\frac{N}{C}$$

Mit diesem Ergebnis zeigt sich in Bezug auf die Maße von Atomen, dass in einem Koordinatensystem für einen Graphen des elektrischen Feldes die E-Achse im Bereich bis zu $10^{15}\,\frac{N}{C}$ beschriftet sein müsste.

b) Der Definitionsbereich ist auf $r > 0$ zu beschränken, da am Punkt null eine Polstelle ist und negative Abstände aus Symmetriegründen ausgeschlossen werden können. Wie das erste folgende Ergebnis zeigt, ergäbe sich bei entsprechender Wahl des Definitionsbereichs auch für negative Zahlen ein Feld für einen negativen Radius. Die Ergebnisse werden in anderen Einheiten berechnet, um Details von Graphen erkennen zu können.