Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,

obwohl Rekonstruktionsaufgaben in den Lehrbüchern für Mathematik meist nur auf wenigen Seiten zu finden sind, kommt gerade solchen Aufgaben bei der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und Denkweisen große Bedeutung zu. Auch werden Rekonstruktionen in kleinerem Umfang oftmals in themenübergreifenden Aufgaben des schriftlichen Abiturs gefordert.

Das Rekonstruieren einer mathematischen Funktion setzt zunächst – mit der Tätigkeit eines Detektivs vergleichbar – das Aufspüren von Informationen über die Eigenschaften der Funktion voraus. Zielgerichtete und gute Betrachtung des mitunter unvollständig dargestellten Funktionsgraphen bei der Suche nach exakt erkennbaren Stellen bzw. Punkten schulen das Beobachtungsvermögen.

Mit dem Erstellen des “Steckbriefes“ der Funktion – dem wesentlichen Teil der Ermittlungsarbeiten – sind die graphisch bzw. verbal gegebenen Informationen in die Sprache der Mathematik zu übersetzen. Hier kommen die Kenntnisse der Schüler über grundlegende Elemente der Analysis zum Einsatz. Die symbolischen Aussagen des Steckbriefes müssen nachfolgend in Gleichungen, welche Parameter enthalten, umgebaut werden.

Das Analysieren von Funktionseigenschaften, deren Beschreibung mit mathematischer Symbolik, Anwendung der Methoden von Differential- und Integralrechnung und das Lösen von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen sind notwendige Techniken auf dem spannenden Weg bei den Ermittlungen zur Rekonstruktion der Funktion.

In diesem Sinne wurden die Aufgaben im vorliegenden Heft aus unterschiedlichen Bereichen vom einfachen bis zum anspruchsvolleren Schwierigkeitsgrad ausgewählt mit dem Anliegen, eine Ergänzung zum Lehrbuch zu geben und die Schüler zum zielstrebigen Rekonstruieren von Funktionsgleichungen zu motivieren. Viel Spaß bei den Ermittlungsarbeiten wünschen das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

REKONSTRUKTIONSAUFGABEN
Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG

Blatt 1

Was versteht man allgemein unter Rekonstruktion?

Rekonstruktion ist der Vorgang des neuerlichen Erstellens oder Nachvollziehens von etwas mehr oder weniger nicht mehr Existierendem oder Unbekanntem, beispielsweise eines verloren gegangenen Werkes der Musik, Literatur oder Kunst, eines zerstörten Gebäudes, eines Tathergangs oder eines Datenbestandes. Die *Rekonstruktion* ist nicht nur der Vorgang, sondern auch sein Ergebnis.

Beim Rekonstruieren ist es unabdingbar, sich an erhaltenen Fragmenten, Quellen oder auch nur Indizien zu orientieren. (Textquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Rekonstruktion)

Große praktische Bedeutung und Anwendung findet die Rekonstruktion in der Architektur. Hier geht es darum – beispielsweise durch Kriege, Naturkatastrophen, Verwitterung – zerstörte Gebäude nach ursprünglichem Aussehen wieder herzustellen. Insbesondere werden zerstörte kunsthistorisch bedeutsame Gebäude rekonstruiert.

Die originalgetreue Rekonstruktion eines Bauwerkes setzt eine tiefgreifende intensive ***Quellenforschung*** voraus, um „Zeugen“ des Originals bereitzustellen, was mit zunehmendem Alter historischer Bauwerke oft sehr schwierig ist, da die Originalbauwerke oft nur unvollständig dokumentiert wurden.

Ein schönes Beispiel für eine gelungene Rekonstruktion ist der Wiederaufbau der in den Jahren von 1726 bis 1743 in Dresden errichteten und am Ende des zweiten Weltkrieges im Februar 1945 vollständig zerstörten Frauenkirche, welche als sakrales barockes Bauwerk weltweit bekannt ist. Die Arbeiten zum Wiederaufbau begannen 1994 und fanden mit finanzieller Hilfe aus aller Welt 2005 einen erfolgreichen Abschluss.

(Siehe auch Abbildungen auf Blatt 2.)

Auch in der Mathematik findet man die Rekonstruktion von Funktionen. Hier geht es darum, mit gegebenen Informationen über Eigenschaften einer Funktion die komplette Funktionsvorschrift zu erlangen.

EA

Aufgabe 1: *Gib weitere Beispiele für Rekonstruktionen an.*

EA

Aufgabe 2: *Welche Informationen benötigt man beispielsweise zur Quellenforschung bei der Rekonstruktion eines Sauriers?*

REKONSTRUKTIONSAUFGABEN
Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG

1 Beispiele für Rekonstruktionen in der Praxis – Einführung

Blatt 2

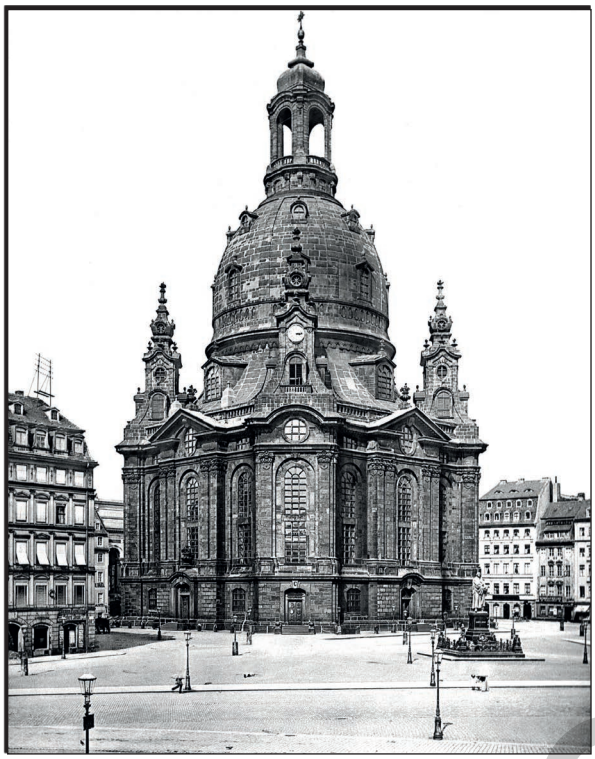


Bild 1: Die Dresdner Frauenkirche um 1897

Bild 2: Trümmer der Dresdner Frauenkirche von 1985

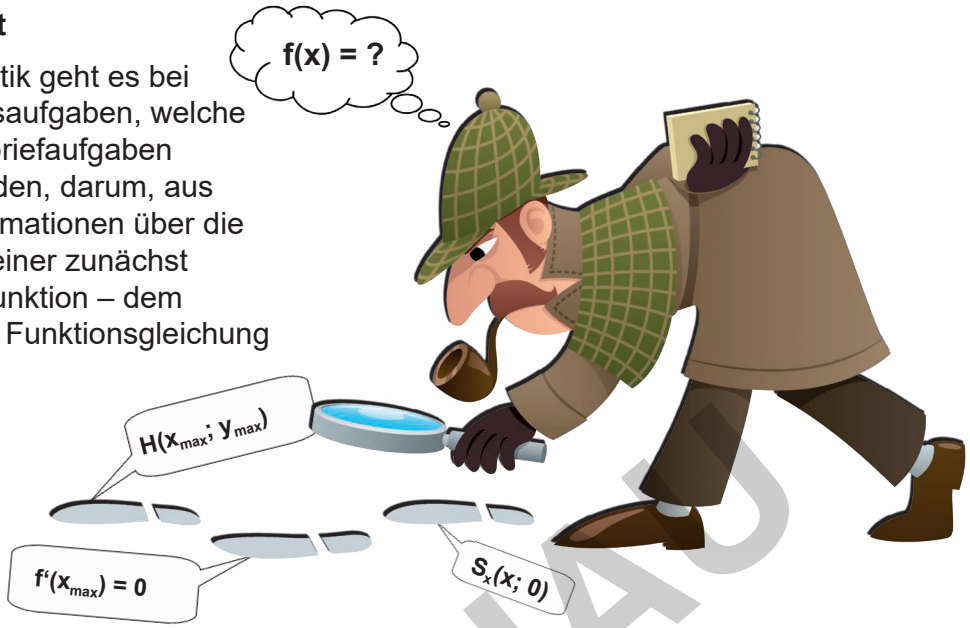
Bild 3: Die Dresdner Frauenkirche um 2010

REKONSTRUKTIONSAUFGABEN
Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG

Blatt 1

Worum es geht

In der Mathematik geht es bei Rekonstruktionsaufgaben, welche auch als Steckbriefaufgaben bezeichnet werden, darum, aus bekannten Informationen über die Eigenschaften einer zunächst unbekannten Funktion – dem Steckbrief – die Funktionsgleichung zu ermitteln.



Beispiel:

Der Punkt S(0; 3) ist Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + c$. Weiterhin ist bekannt, dass die Funktion die Nullstellen $x_{1;2} = \pm\sqrt{2}$ besitzt.

Ermittle die Funktionsgleichung.

Lösung:

Die Lösung ist mit dem Wissen über quadratische Funktionen aus der Sekundarstufe I ohne Anwendung der Differentialrechnung möglich.

- Aus den Koordinaten des Scheitelpunktes folgt die Gleichung $f(0) = a \cdot 0^2 + c = 3$ und somit $c = 3$.
- Die Kenntnis der Nullstellen führt zu den Gleichungen $a \cdot (\pm\sqrt{2})^2 + 3 = 0$, welche beide die Lösung $a = -\frac{3}{2}$ haben.

Die gesuchte Funktion ist folglich $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3$.

EA

Aufgabe 1: *Löse „zur Erwärmung“ die folgenden einfachen Rekonstruktionsaufgaben ohne Hilfsmittel.*

Die lineare Funktion $f(x) = mx + n$ hat die Achsenschnittpunkte $S_x(-3; 0)$ und $S_y(0; 2)$. Berechne die Werte für m und n. Gib die Funktionsgleichung an.

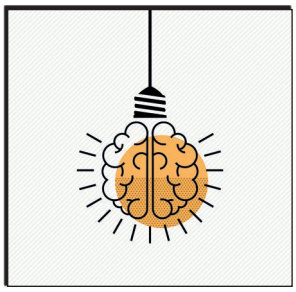
6.1 Ein Beispiel

EA

Aufgabe:

Eine gebrochenrationale Funktion vom Typ

$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ *hat eine Polstelle bei x = 3, die Asymptote g(x) = 2 und an der Stelle x = –1 die Steigung 1/2. Bestimme die Parameter a, b, c. Gib die Funktionsgleichung an und skizziere den Funktionsgraph.*



Lösung:

- *Was bekannt ist :*

  (1) n(x) = 3 + c = 0 (2) z(x) / n(x) = 2 + r(x) (3) f'(–1) = 1/2

- *Struktur der Funktion und der Ableitungsfunktion*

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c} \qquad f'(x) = \frac{(ax+b)' \cdot (x + c) - (ax + b) \cdot (x + c)'}{(x + c)^2}$$

$$= \frac{a \cdot (x + c) - (ax + b) \cdot 1}{(x + c)^2} = \frac{ac - b}{(x + c)^2}$$

- *Bestimmung der Parameter*

  I $3 + c = 0 \rightarrow c = -3$

  II $a = 2$

  III $\frac{ac - b}{(-1 + c)^2} = \frac{1}{2}$

  a = 2 und c = –3 in III $\rightarrow \frac{2 \cdot (-3) - b}{(-1 + (-3))^2} = \frac{1}{2} \qquad b = -14$

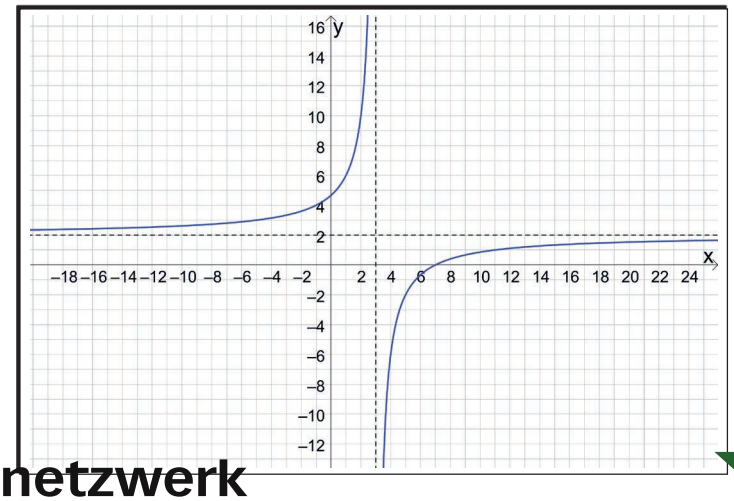
Resultat: a = 2; b = – 14; c = – 3; $\mathbf{f(x) = \frac{2x - 14}{x - 3}}$

Nullstelle des Zählerpolynoms:
Aus $2x - 14 = 0 \rightarrow x = 7$

Nullstelle des Nennerpolynoms:
Aus $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

Da die Nullstellen von Zählerpolynom und Nennerpolynom verschieden sind, liegt bei x = 3 eine Polstelle vor.

Es gilt: $\lim_{x \to 3} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$ *und* $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$



Zur Auffrischung

Senkrechte Asymptoten

z(x) sei das Zählerpolynom und n(x) das Nennerpolynom der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

x_0 ist eine **Polstelle** von f, wenn gilt: $n(x_0) = 0$ und $z(x_0) \neq 0$.
Die Gerade $x = x_0$ ist senkrechte Asymptote von f.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Waagerechte Asymptoten

Für den Fall, dass der Grad des Zählerpolynoms und der Grad des Nennerpolynoms übereinstimmen, hat f eine waagerechte Asymptote.

Die Geradengleichung lautet

$$g(x) = d.$$

Es gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = d \text{ oder } \lim_{x \to -\infty} f(x) = d$$

Die Geradengleichung erhält man durch Division des Zählerpolynoms durch das Nennerpolynom.

z(x) / n(x) = d + r(x), wobei r(x) das Restpolynom ist, welches sich Null annähert, wenn x gegen plus oder minus Unendlich strebt.

REKONSTRUKTIONSAUFGABEN Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG

6.2 Übungsaufgaben – Blatt 1

EA

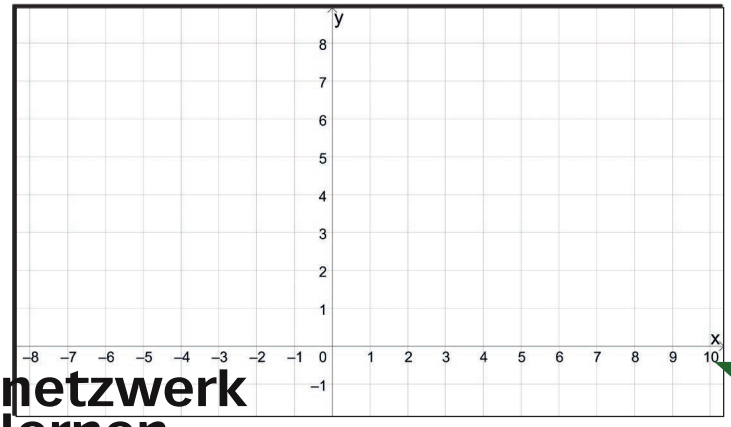
Aufgabe 1: *Eine gebrochenrationale Funktion vom Typ* $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^2}$ *hat die Asymptote* $g(x) = 2$ *und den Wendepunkt* $W(1; 0)$.

a) *Bestimme die Parameter a, b, c und gib den Funktionsterm an.*

b) *Zeige, dass die Nullstellen des Zählerpolynoms und des Nennerpolynoms verschieden sind und gib die Nullstellen der Funktion an.*

c) *Berechne die Koordinaten des Extrempunktes. Weise die Art des Extremums nach.*

d) *Skizziere den Funktionsgraph.*



REKONSTRUKTIONSAUFGABEN
Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG

6.2 Übungsaufgaben – Blatt 3

EA

Aufgabe 5: *Die gebrochenrationale Funktion* $f(x) = \frac{x^2+bx+c}{x^2-9}$ *schneidet die y-Achse bei* $\frac{1}{3}$ *und verläuft durch den Punkt P(–2; –1).*

a) *Wie lautet die Funktionsgleichung?*

b) *Gib die Nullstellen der Funktion an.*

EA

Aufgabe 6: *Die gebrochenrationale Funktion* $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2+bx+c}$ *verläuft durch die Punkte* $P_1(1; 2)$ *und* $P_2(-5; 1/2)$.

a) *Ermittle die Funktionsgleichung.*

b) *Gib die Nullstellen der Funktion an.*

EA

Aufgabe 7: *Die gebrocherationale Funktion der Form* $f(x) = \frac{x^2-ax}{x+b}$ *hat eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung* $x = -2$ *und die Nullstellen* $x_1 = 0$ *und* $x_2 = 5$. *Rekonstruiere den Funktionsterm.*

Lösungen

4 **Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen dritten und höheren Grades**

4.3 Übungsaufgaben

Aufgabe 5:

- Struktur der Funktionsgleichung und Ableitungsfunktionen
  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b$
- Bekannt ist: (1) $f(-2) = 0$ (2) $f''(0) = 0$ (3) $f'(0) = \frac{1}{3}$ (4) $f(0) = t(0) = 2$
- Gleichungssystem
  I $\quad -8a + 4b - 2c + d = 0$
  II $\quad 2b = 0$
  III $\quad c = \frac{1}{3}$
  IV $\quad d = 2$
- Lösung des Gleichungssystems aus II $\rightarrow$ $b = 0$
  $b = 0,\ c = \frac{1}{3},\ d = 2$ in I einsetzen $\rightarrow$ $-8a - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 0$ $\quad a = \frac{1}{6}$
- Resultat $a = \frac{1}{6};\ b = 0;\ c = \frac{1}{3};\ d = 2;$ $\quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

Aufgabe 6:

Steckbrief:
Exakt erkennbar sind: T(0; 0), T ist Tiefpunkt, H1(–2; 8), H1 ist Hochpunkt; weitere Extremstelle bei 1.
(1) $f(0) = 0$ (2) $f'(0) = 0$ (3) $f(-2) = 8$ (4) $f'(-2) = 0$ (5) $f'(1) = 0$
Struktur der Funktionsgleichung und Ableitungsfunktionen:
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $\quad f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ $\quad f'''(x) = 24ax + 6b$
Gleichungssystem:
I $\quad e = 0$
II $\quad d = 0$
III $\quad 16a - 8b + 4c - 2d + e = 8$
IV $\quad -32a + 12b - 4c + d = 0$
V $\quad 4a + 3b + 2c + d = 0$

Lösung des Gleichungssystems: $e = 0$ und $d = 0$ in III, IV, V
$\rightarrow$ III $\quad 16a - 8b + 4c = 8$
IV $\quad -32a + 12b - 4c = 0$
V $\quad 4a + 3b + 2c = 0$

---

c eliminieren $\quad$ IV + III $\rightarrow$ VI $\quad -16a + 4b = 8$
IV + 2 • V $\rightarrow$ VII $\quad -24a + 18b = 0$

---

a eliminieren $\quad -3 \cdot \text{VI} + 2 \cdot \text{VII} \rightarrow 24b = -24 \quad b = -1$

$b = -1$ in VI $\rightarrow$ $-16a + 4 \cdot (-1) = 8$ $\quad a = -3/4$

$b = -1$ und $a = -\frac{3}{4}$ in V $\quad 4 \cdot (-\frac{3}{4}) + 3 \cdot (-1) + 2c = 0 \quad c = 3$

Resultat: $a = -\frac{3}{4}$; $b = -1$; $c = 3$; $d = 0$; $e = 0$; $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$

Nullstellen: Ansatz:

$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 = 0 \mid x^2$ ausklammern $\rightarrow$ $x^2 \cdot (-\frac{3}{4}x^2 - x + 3) = 0$

$x_{1;2} = 0$ und $-\frac{3}{4}x^2 - x + 3 = 0 \mid : (-\frac{3}{4})$ $\quad x^2 + \frac{4}{3}x - 4 = 0$

$x_{3;4} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{(-\frac{2}{3})^2 - (-4)} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{(\frac{40}{9})}$ $\quad x_3 = \frac{\sqrt{40} - 2}{3} \approx 1{,}44$ und $x_4 = -\frac{\sqrt{40} + 2}{3} \approx -2{,}77$

Außer bei 0 liegen weitere Nullstellen bei etwa 1,44 und bei etwa –2,77.

<u>Ordinate des zweiten Hochpunktes</u>:
Graphisch lässt sich Abszisse des zweiten Hochpunktes mit $x_{H2} = 1$ ablesen. Überprüfung ergibt:
$f(x) = -\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$ $\quad f'(x) = -3x^3 - 3x^2 + 6x$ $\quad f''(x) = -9x^2 - 6x + 6$ $\quad f'''(x) = -18x - 6$

Ansatz: $f'(x) = -3x^3 - 3x^2 + 6x = 0 \mid x$ ausklammern $\quad x \cdot (-3x^2 - 3x + 6) = 0$

$x_1 = 0$ (erkennbare Abszisse des Tiefpunktes T)

Aus $-3x^2 - 3x + 6 = 0$ folgt nach Division durch – 3: $\quad x^2 + x - 2 = 0$

$x_{2;3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 - (-2)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_2 = 1$ und $x_3 = -2$ (erkennbare Abszisse des Hochpunktes $H_1(-2; 8)$)

Die Ordinate des Hochpunktes H_2 erhält man als Funktionswert $y_{H2} = f(1) = (-\frac{3}{4}) \cdot 1^4 - 1^3 + 3 \cdot 1^2 = \frac{5}{4}$

Die nicht erkennbare Ordinate des zweiten Hochpunktes ist $\frac{5}{4}$.

REKONSTRUKTIONSAUFGABEN
Steckbriefe in der Analysis – Bestell-Nr. P12 748
KOHL VERLAG