Inhalt

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

Vorwort

Während im ersten Band der Reihe „Vektorielle Geometrie“ Aufgabenmaterial zu den Grundlagen der Vektorrechnung – wie beispielsweise Definitionen des Vektors als gerichtete Größe, Komponentenschreibweise von Vektoren, Darstellung von Punkten, Vektoren und geometrischen Objekten im räumlichen Koordinatensystem, zeichnerische und rechnerische Addition und Subtraktion von Vektoren, ihre Vervielfachung sowie Untersuchungen zur Gültigkeit von vektoriellem Kommunikativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz – angeboten wird, konzentriert sich der zweite Band ausschließlich auf die vektoriellen Operationen *Skalarprodukt* und *Vektorprodukt*.

Entsprechend der Bedeutung des Skalarproduktes für Berechnungen in Physik und Technik wird in vorliegendem Heft für die Einführung dieser Operation die Berechnung der mechanischen Arbeit als anschauliches, fachübergreifendes Beispiel gewählt. Dass bei dieser Berechnung – folgend aus den Gesetzen der Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck – der Kosinus des Winkels zwischen Kraftvektor und seiner Komponente in Wegrichtung einfließt, wird den Schülern verständlich gemacht und ebenso, dass die Verknüpfung der Vektoren von Kraft und Weg die richtungslose Größe Arbeit als *Skalarprodukt* der vektoriellen Größen Kraft und Weg definiert.

Die verallgemeinerte Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren als Produkt ihrer Beträge und dem Kosinus ihres eingeschlossenen Winkels und die Verbindung mit der Koordinatenform des Skalarproduktes ermöglichen es, den von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkel sowie Winkel geometrischer Figuren zu berechnen, was einen Schwerpunkt in diesem Abschnitt darstellt. Dabei kommt der Orthogonalität von Vektoren, welche sich mit Hilfe des Skalarproduktes einfach nachweisen lässt, besondere Bedeutung zu. Berechnungen am Dreieck und einfache geometrische Beweise runden das Thema ab.

Im zweiten Abschnitt des Heftes wird das *Vektorprodukt* (auch *Kreuzprodukt*) als weitere Form der multiplikativen Verknüpfung von Vektoren behandelt. Die Motivation für die Einführung dieser Operation wird aus der Notwendigkeit entwickelt, zu einer von zwei Vektoren aufgespannten Ebene einen *Normalenvektor*, welcher folglich orthogonal zu beiden Spannvektoren sein muss, zu erzeugen. Mit der Lösung des Gleichungssystems, welches aus dem Anwenden der Orthogonalitätsbedingung auf beide Spannvektoren resultiert, ergibt sich die Lösungsmatrix zur Berechnung des Vektorproduktes.

Auch die vereinfachte Rechenvorschrift der kreuzweisen Multiplikation entsprechender Komponenten wird vorgestellt. Neben zahlreichen Übungen zur Berechnung des Vektorproduktes und Untersuchungen zur Gültigkeit der bekannten Rechengesetze liegt ein Schwerpunkt auf der Anwendung zur Berechnung von Parallelogramm- und Dreiecksflächen sowie des Volumens eines Spats mittels *Spatprodukt*.

Die abschließend angebotene komplexe Aufgabe mit Prüfungsniveau und ein Multiple-Choice-Test können zur Leistungsbewertung oder Selbstkontrolle der Schüler eingesetzt werden. In dem Anliegen, sowohl zur Verbesserung der Fertigkeiten der Schüler beim Berechnen von Skalar- und Vektorprodukt als auch zum Verständnis der Zusammenhänge beizutragen, mit dem weiteren Ziel, eine gute Grundlage für die Behandlung von Geraden im Raum, Ebenen und deren Lagebeziehung – Inhalt des Folgebands „Vektorielle Geometrie, Band 3“ – zu schaffen, wünschen beim Einsatz des Materials viel Erfolg:

Das Team des Kohl-Verlags und

Barbara Theuer

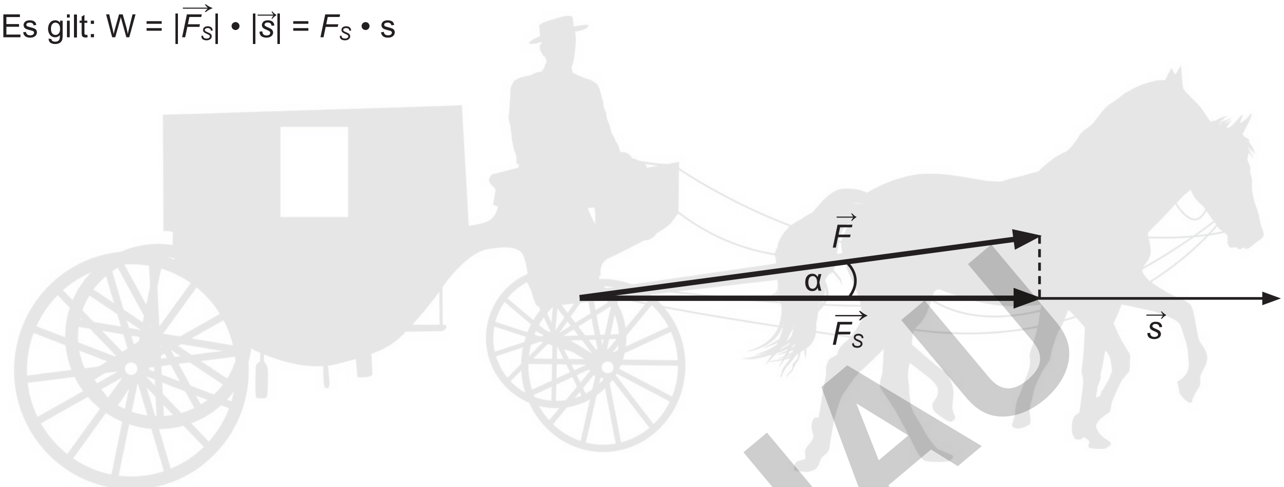
1 Das Skalarprodukt

1.1 Einführung und Definition des Skalarproduktes (Blatt 1)

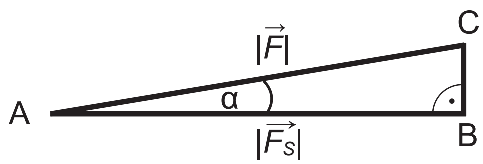
Ein Beispiel aus der Physik

Eine Pferdekutsche wird gleichmäßig über einen Waldweg gezogen. Die von den Pferden aufgebrachte Zugkraft wird in Richtung der Deichsel aufgebracht. Diese wird durch den Kraftvektor $\vec{F}$ dargestellt. Um die mechanische Arbeit W zu berechnen, welche bei der Bewegung der Kutsche um den Weg s – veranschaulicht durch den Vektor $\vec{s}$ – verrichtet wird, ist die Kraftkomponente $\vec{F_S}$ in Wegrichtung entscheidend.

Es gilt: $W = |\vec{F_S}| \cdot |\vec{s}| = F_S \cdot s$



Den Betrag der Kraftkomponente $\vec{F_S}$ kann man mit Hilfe des Kosinus ausdrücken. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC gilt: $|\vec{F_S}| = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha$



Somit folgt für die mechanische Arbeit:

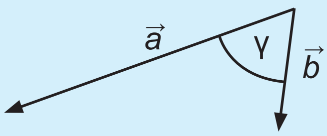
$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

Dieses Produkt ist kein Vektor, sondern eine skalare Größe (= reelle Zahl). Es wird als ***Skalarprodukt*** $\vec{F} \bullet \vec{s}$ **der Vektoren** $\vec{F}$ **und** $\vec{s}$ bezeichnet.

Geometrische Definition

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schließen den Winkel γ ein.

Die Operation $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ wird als **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert.



Beispiel:

Zwei Pferde ziehen mit einer Gesamtkraft von 1600 N in Richtung der Deichsel (α = 30° Neigung gegen die Horizontale) eine Kutsche um 100 m entlang eines horizontalen Waldweges. Welche mechanische Arbeit wird dabei verrichtet?

Lösung:

$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\alpha$

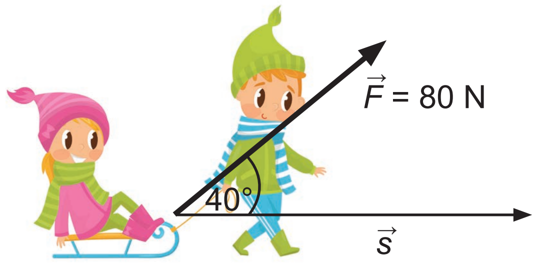
$W = 1600 \text{ N} \cdot 100 \text{ m} \cdot \cos 30°$

$W \approx 138.564 \text{ Nm} \approx 138{,}6 \text{ kJ}$

1 Das Skalarprodukt

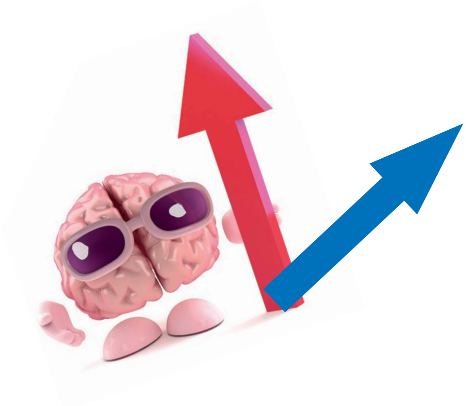
1.1 Einführung und Definition des Skalarproduktes (Blatt 2)

Aufgabe 1: *Berechne die mechanische Arbeit, die zum Ziehen eines besetzten Schlittens entlang einer horizontalen Strecke von 300 m Länge verrichtet werden muss. Entnimm die nötigen Angaben der Skizze.*



Aufgabe 2: *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren a und b schließen einen Winkel von 60° ein.
Berechne das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *nach der geometrischen Definition (Blatt 1).*



Aufgabe 3: **a)** *Zeichne auf genormtes Kästchenpapier (Kästchenbreite 0,5 cm) die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ *mit einem gemeinsamen Anfangspunkt. Ermittle die Länge der Vektoren und die Größe des von* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *eingeschlossenen Winkels γ aus der Zeichnung.*

b) *Berechne das Skalarprodukt* $\vec{a} \bullet \vec{b}$ *nach der geometrischen Definition.*

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

1 Das Skalarprodukt

1.4 Rechengesetze für das Skalarprodukt von Vektoren (Blatt 2)

Rechengesetze für das Skalarprodukt

$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$	**Kommutativgesetz**
$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$	**Distributivgesetz**

Das Assoziativgesetz gilt nicht. Es gilt aber:
$(\vec{r} \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{r} \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b})$ für die Multiplikation mit einem Skalar (= reelle Zahl) r.

Das letzte Gesetz sieht dem Assoziativgesetz nur ähnlich, es sind aber zwei verschiedene Operationen beteiligt; zum besseren Verständnis folgt eine Übersicht:

Operator	Operation	Verknüpfung	Ergebnis
Großer Malpunkt ●	Skalarprodukt	Vektor mit Vektor	Skalar
Kleiner Malpunkt •	Vielfaches eines Vektors	Skalar mit Vektor	Vektor

Ein echtes Assoziativgesetz (nur mit ●) macht also keinen Sinn für das Skalarprodukt. Als Ergebnis einer Klammer würde man einen Skalar erhalten, den man gar nicht per ● (Skalarprodukt) mit einem weiteren Vektor verknüpfen kann. Man sieht auch, dass beim Distributivgesetz zwei verschiedene Plus-Operationen vorkommen. Links werden zwei Vektoren addiert (in Koordinatenform), während rechts zwei reelle Zahlen (= Skalare) addiert werden.

Um diese Gesetze allgemein zu beweisen, wendet man nach der Ausführung des Skalarprodukts die entsprechenden Gesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen an.

Beweis des Kommutativgesetzes:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = b_1\, a_1 + b_2\, a_2 + b_3\, a_3}_{\text{(nach Kommutativges. der Multiplik. reeller Zahlen)}} = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

Aufgabe 5: *Beweise die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für Vektoren ein zweites Mal mithilfe der geometrischen Definition des Skalarproduktes!*

Aufgabe 6: *Beweise das Distributivgesetz für das Rechnen mit Vektoren (auf einem Extrablatt).*

Aufgabe 7: Für das Rechnen mit reellen Zahlen gilt: $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

a) *Nutze dieses Gesetz zum vorteilhaften Berechnen des Terms $1{,}25^2 \cdot 8^2$. ohne Hilfsmittel.*

b) Zeige mit einem Gegenbeispiel, dass eine entsprechende Regel für Vektoren nicht gilt:
$(\vec{a} \bullet \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.
Hinweis: Die Regel ausführlich geschrieben: $(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = (\vec{a} \bullet \vec{a}) \cdot (\vec{b} \bullet \vec{b})$

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746

1 Das Skalarprodukt

1.6 Orthogonale Vektoren (Blatt 1)

Wenn zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen und somit den Winkel $\gamma = 90°$ einschließen, werden sie als ***orthogonal*** zueinander bezeichnet.

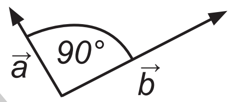
Symbolische Schreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Aus der Definition des Skalarproduktes $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$

folgt für $\gamma = 90°$: $a \bullet b = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0$, d.h. $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

Die Umkehrung dieses Sachverhaltes stellt ein bedeutsames Kriterium für die Orthogonalität zweier Vektoren dar.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt den Wert null annimmt.
Symbolische Schreibweise: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$



Dabei bedeutet der Doppelpfeil gerade das „genau dann ... wenn“. Die beiden Aussagen links und rechts vom Doppelpfeil sind exakt gleichwertig, man sagt auch äquivalent. Aus der einen Aussage folgt immer auch die andere.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 + 0 + (-6) = 0$

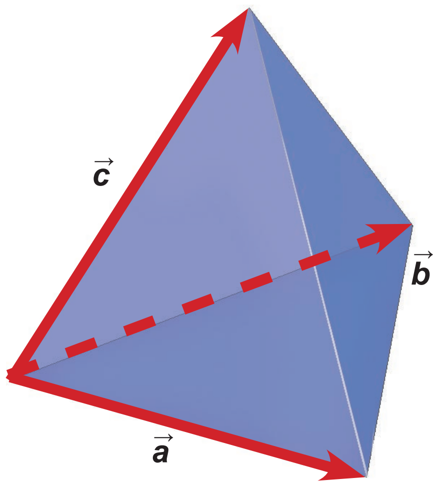
Aufgabe 1: *Untersuche zunächst rechnerisch, ob die folgenden Vektoren orthogonal zueinander sind. Stelle die Vektoren anschließend zeichnerisch dar.*

a) $\vec{a} = \binom{0}{8}$, $\vec{b} = \binom{6}{0}$	**b)** $\vec{k} = \binom{6}{4}$, $\vec{l} = \binom{-4}{6}$	**c)** $\vec{u} = \binom{6}{4}$, $\vec{v} = \binom{4}{6}$

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

2.5 Anwendungen des Vektorproduktes (Blatt 6)

Volumen einer dreiseitigen Pyramide
Eine dreiseitige Pyramide werde durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Für das Volumen dieser Pyramide gilt dann:
$\mathbf{V = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \otimes \vec{b}) \bullet \vec{c}|}$

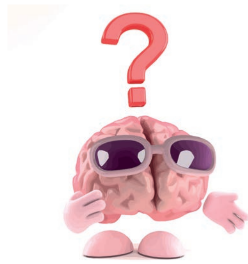


Warum ist das Volumen der dreiseitigen Pyramide **ein Sechstel** des Volumens des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats?

– Das Volumen einer Pyramide beträgt ein Drittel des Volumens eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.
– Ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche ist die Hälfte eines Spats, wenn der Spat entlang der Diagonale seiner Grundfläche geteilt wird.

<u>**Aufgabe 9**</u>: Ein Spat wird durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannt.

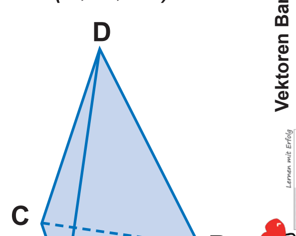
a) *Berechne das Volumen des Spats.*



b) *Teilt man den Spat entlang der Diagonale der Grundfläche, so entstehen zwei gleichgroße Prismen mit dreieckiger Grundfläche. Berechne das Volumen eines solchen Prismas.*

c) *Ein Prisma fasst drei volumengleiche Pyramiden, welche die gleiche Grundfläche und die gleiche Höhe wie das Prisma haben. Berechne das Volumen einer solchen Pyramide.*

<u>**Aufgabe 10**</u>: *Berechne das Volumen der durch die Punkte A, B, C und D aufgespannten Pyramide mit den Punkten A(-5; -6; 1), B(8; 2; 1), C(-4; 1; 5) und D(0; 0; -2).*

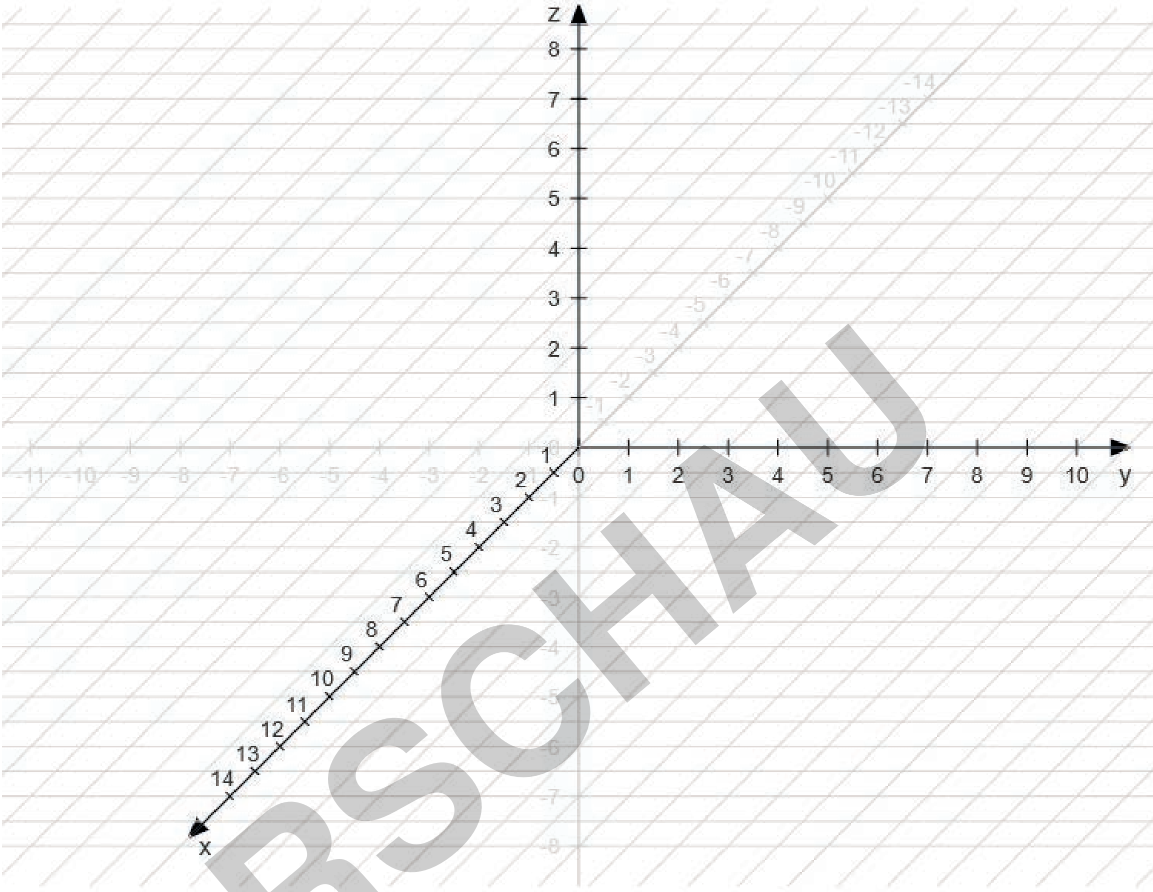


Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

3 Rund um den Tetraeder – Eine komplexe Aufgabe (Blatt 2)

<u>**Aufgabe 4**</u>: Gegeben ist eine dreiseitige Pyramide ABCD mit der Spitze D durch folgende Punktkoordinaten: A(1; 2; 3), B(7; 8; 3), C(7; 2; 9), D(1; 8; 9).

a) *Stelle den Körper im räumlichen Koordinatensystem dar.*



b) *Weise nach, dass es sich bei der Pyramide um einen regelmäßigen Tetraeder handelt.*

c) *Berechne den Inhalt der Grundfläche ABC und den Oberflächeninhalt des Tetraeders.*
Löse alle weiteren Teilaufgaben mit Hilfe der Vektorrechnung.

4 Multiple Choice – Test (Blatt 1)

1. Welchen Sachverhalt beschreibt das Skalarprodukt? *(Mehrfachantworten möglich)*

☐ **A** Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren ist ein Maß für den von ihnen eingeschlossenen Winkel.

☐ **B** Das Skalarprodukt hat die Einheit „Grad“.

☐ **C** Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren eine reelle Zahl zu.

☐ **D** Bei gleichgerichteten Vektoren ist das Skalarprodukt gleich dem Produkt ihrer Beträge.

☐ **E** Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist ein Maß für den Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms.

☐ **F** Das Skalarprodukt zueinander orthogonaler Vektoren ist unabhängig von ihrer Länge stets null.

☐ **G** Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren nimmt stets den Wert eins an.

2. Das Skalarprodukt $\vec{a} \bullet \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{8} \\ 3 \end{pmatrix}$ nimmt folgenden Wert an:

☐ **A** $\sqrt{2}$

☐ **B** 2

☐ **C** 5

☐ **D** 0

☐ **E** 14

3. Für welche Werte von k nimmt das Skalarprodukt $\begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2 \end{pmatrix}$ den Wert 2 an?

☐ **A** 1

☐ **B** 3 und 0

☐ **C** 0 und -1

☐ **D** $k_{1;2} = 1 \pm \sqrt{4}$

☐ **E** nicht lösbar

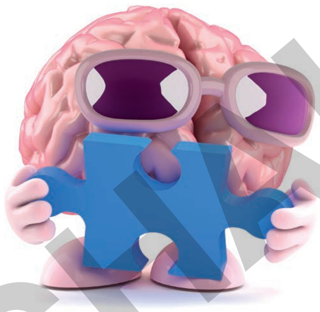
4 Multiple Choice – Test (Blatt 2)

4. Wie groß ist der Betrag des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$?

- ☐ **A** $|\vec{v}| = 7$
- ☐ **B** $|\vec{v}| = \sqrt{7}$
- ☐ **C** $|\vec{v}| = \sqrt{119}$
- ☐ **D** $|\vec{v}| = 169$
- ☐ **E** $|\vec{v}| = 13$

5. Welchen Winkel schließen die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein?

- ☐ **A** 30°
- ☐ **B** 60°
- ☐ **C** 90°
- ☐ **D** einen anderen Winkel
- ☐ **E** nicht berechenbar



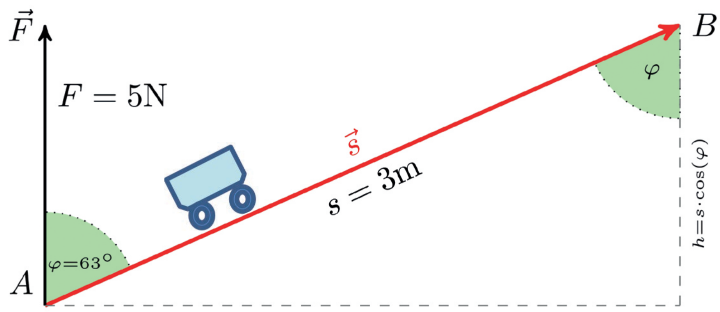
6. Wie groß sind die Seiten und die Innenwinkel des durch die Punkte A(1; 2; 3), B(-4; 3; 1) und C(3; 2; -2) bestimmten Dreiecks?

- ☐ **A** $|\overline{AB}| \approx 5{,}48$ LE, $|\overline{AC}| \approx 5{,}39$ LE, $|\overline{BC}| \approx 7{,}68$ LE, $\alpha \approx 45{,}5°$, $\beta = 44{,}5°$, $\gamma \approx 90°$
- ☐ **B** $|\overline{AB}| \approx 5{,}48$ LE, $|\overline{AC}| \approx 5{,}39$ LE, $|\overline{BC}| \approx 7{,}68$ LE, $\alpha = 90°$, $\beta \approx 54{,}5°$, $\gamma \approx 45{,}5°$
- ☐ **C** $|\overline{AB}| \approx 5{,}48$ LE, $|\overline{AC}| \approx 5{,}39$ LE, $|\overline{BC}| \approx 7{,}68$ LE, $\alpha = 90°$, $\beta \approx 44{,}5°$, $\gamma \approx 45{,}5°$

7. Ein Wagen der Gewichtskraft F = 5 N wird über eine schiefe Ebene der Länge s = 3 m von A nach B transportiert. Der Kraftvektor $\vec{F}$ schließt mit dem Wegvektor $\vec{s}$ einen Winkel von φ = 63°ein. $\vec{F}_s$ sei die Kraftkomponente in Wegrichtung, h sei der Höhenunterschied von A und B. Welche Aussagen treffen für die verrichtete Arbeit W zu?

(Mehrfachantworten möglich)

- ☐ **A** $W = \vec{F} \bullet \vec{s}$
- ☐ **B** $W = |\vec{F}_s| \cdot |\vec{s}|$
- ☐ **C** $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi$
- ☐ **D** $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \sin (90° - \varphi)$
- ☐ **E** W = 15 Nm (15 J)
- ☐ **F** W ≈ 13,37 Nm (13,37 J)
- ☐ **G** W ≈ 6,81 Nm (6,81 J)



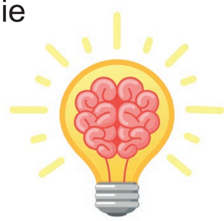
Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG

3 Rund um den Tetraeder – Eine komplexe Aufgabe (Blatt 1)

Wiederholung: (siehe Zeichnung unten)

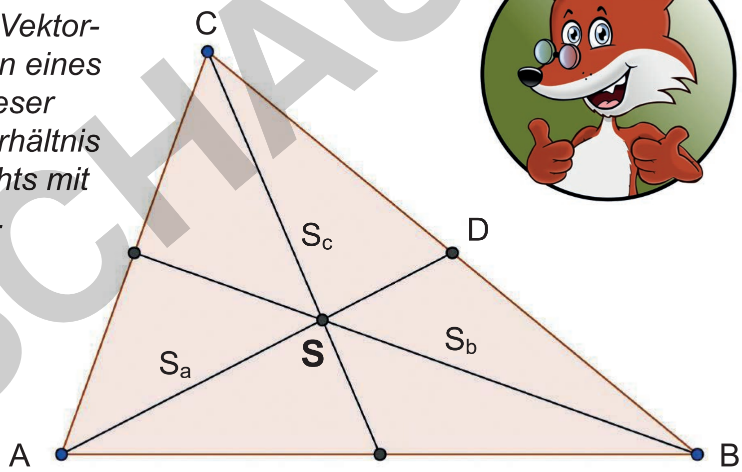
Schwerpunkt eines Dreiecks
Der gemeinsame Schnittpunkt der Seitenhalbierenden S_a, S_b und S_c ist der ***Schwerpunkt*** des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis **2 : 1**, wobei die längere der beiden Teilstrecken die Strecke vom Schwerpunkt bis zum Eckpunkt ist; beispielsweise: $\overline{AS} : \overline{SD} = 2 : 1$.

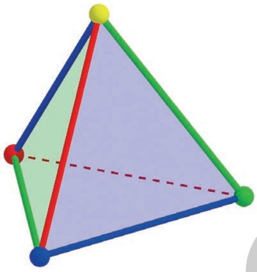
Sind die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks bekannt, so ergeben sich die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_S; y_S; z_S)$ als deren arithmetisches Mittel.



$x_S = \frac{1}{3} \cdot (x_A + x_B + x_C)$ $\quad y_S = \frac{1}{3} \cdot (y_A + y_B + y_C)$ $\quad z_S = \frac{1}{3} \cdot (z_A + z_B + z_C)$
Für den Ortsvektor *OS* des Schwerpunktes des Dreiecks ABC gilt:
$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$

Aufgabe 1: (für Experten)
Beweise auf einem Extrablatt mit Hilfe der Vektorrechnung, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt schneiden und dieser Schnittpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt. Ergänze dazu die Zeichnung rechts mit Vektoren für Seiten und Seitenhalbierende.





Aufgabe 2: *Welche wesentlichen Eigenschaften hat ein regelmäßiger Tetraeder?*

____

____

Aufgabe 3: *Zeige mittels Vektorrechnung, dass für den Schwerpunkt S der Grundfläche eines Tetraeders, welcher auch Fußpunkt der Körperhöhe ist, gilt:*
$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C})$. *Ergänze dazu die Zeichnung oben rechts mit den Ursprungsvektoren der Punkte A, B, C und S.*

Vektoren Band 2
Skalarprodukt und Vektorprodukt - Bestell-Nr. P12 746
KOHL VERLAG