

7. Wachstum und Zerfall – linear und exponentiell (Umgang mit Graphen)

Zeitbedarf

60–90 Minuten

Voraussetzungen

Die S. kennen die Bedeutung von linearem und exponentiellem Wachstum sowie von linearer Abnahme und von exponentiellem Zerfall. Die S. kennen den Umgang mit den verschiedenen Wachstumsformeln.

Kompetenzen

- S. ordnen Graphen der passenden Sachsituation zu.
- S. üben den Umgang mit den verschiedenen Wachstumsformeln.
- S. können Graphen genau beschreiben.

Vorbereitung

- Graphen (**M1**) für die Tafel vergrößert kopieren und ausschneiden
- Überschriftskarten (**M2**) vergrößert kopieren und ausschneiden
- Sachsituationen (**M3**) vergrößert kopieren und ausschneiden
- Arbeitsblatt (**M4**) in ausreichender Zahl kopieren
- ergänzendes Arbeitsblatt (**M5**) in ausreichender Zahl kopieren

Ablauf

Motivation / Themenfindung

- L. hängt die Graphen (**M1**) an die Tafel.
- S. äußern sich dazu und beschreiben den Verlauf der Graphen (steigend, fallend, steil, flach, ...).
- L. notiert evtl. Stichwörter an der Tafel.
- S. ordnen den Graphen die passenden Überschriftskarten (**M2**) und Sachsituationen (**M3**) zu.

Arbeitsauftrag

L. erklärt: „Wir haben jetzt verschiedene Wachstums- und Zerfallsprozesse betrachtet und passende Situationen zugeordnet. In der nächsten Arbeitsphase beschäftigt ihr euch genauer mit einzelnen Situationen.“

Erarbeitung

- L. teilt die Materialien aus.
- S. bearbeiten das Arbeitsblatt **M4** in Einzel- und Partnerarbeit.
- L. steht dabei beratend zur Verfügung.

Kontrolle der Ergebnisse

- L. fragt bei jeder Situation von **M4** ab, wer sich mit dieser Situation beschäftigt hat und welche Annahmen getroffen wurden.
- S. erklären ihre Vorgehensweisen und skizzieren einzelne Graphen an der Tafel.
- S. ziehen Vergleiche zwischen den Graphen (z.B.: wird ein höherer Anfangswert des Autos angenommen, fällt die Kurve steiler ab, sie beginnt aber auch höher ...).

Abschluss

- S. ergänzen die Stichwörter vom Beginn der Stunde an der Tafel und können die Graphen genauer beschreiben.
- Zur weiteren Festigung als Hausaufgabe oder als freiwillige Übung wird das Arbeitsblatt **M5** besprochen und von den S. bearbeitet.

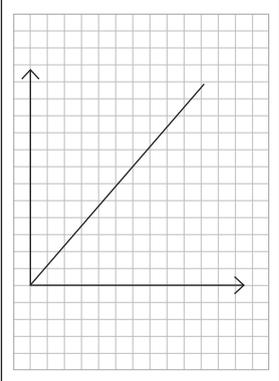
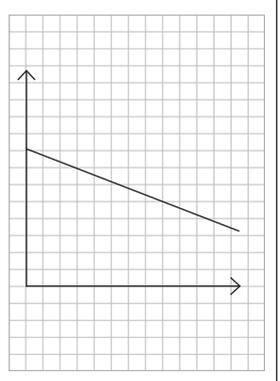
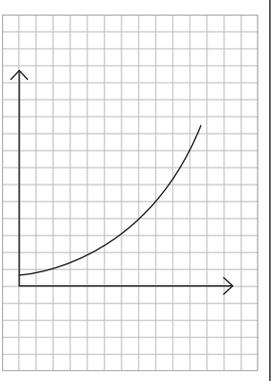
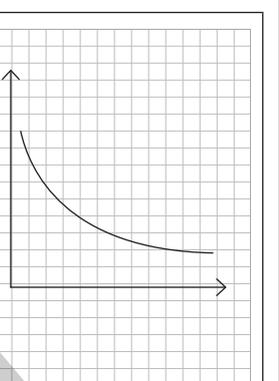
Ausblick

- **M1–M3** werden gut sichtbar im Klassenzimmer aufgehängt.
- Passende Formeln werden ergänzt und dazu gehängt. So entsteht eine gut sichtbare Übersicht über die verschiedenen Wachstums- und Zerfallsprozesse.



Lösungen

M1-3

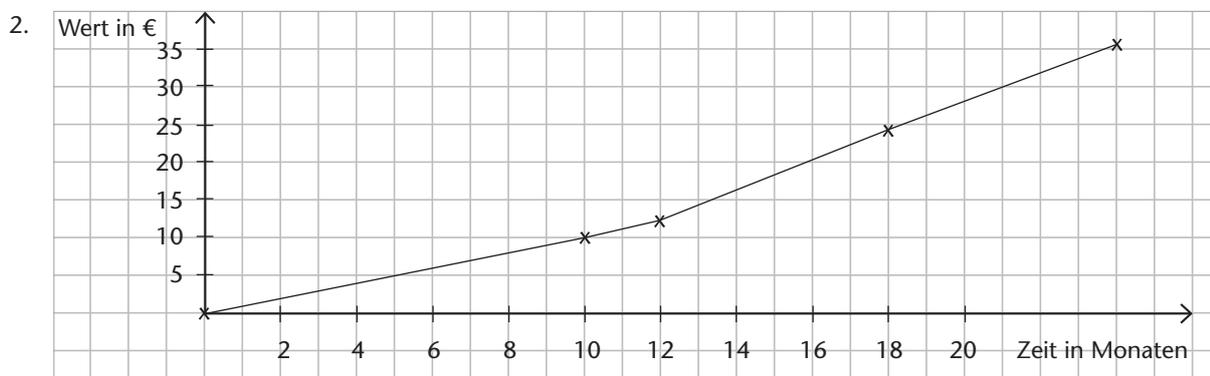
			
Lineares Wachstum	Lineare Abnahme	Exponentielles Wachstum	Exponentieller Zerfall
Tobias spart jeden Monat 1 €.	Eine Kerze brennt pro Stunde 1,2 cm ab.	Die Anzahl der Bakterien vervierfacht sich täglich.	Der Wert eines Autos sinkt jährlich um 18 %.
Um eine Minute lang zu telefonieren, zahlt Benjamin 11 ct.	Aus einem undichten Planschbecken fließen täglich 24l Wasser heraus.	Ein Geldbetrag wird jährlich mit 1,5 % verzinst.	Eine Tasse Tee kühlt jede Minute um 2 % ab.



M5

$$1. W_{18} = 35\,000\text{€} \cdot 0,82^{18} \approx 983,37\text{€}$$

Nach 18 Jahren ist das Auto weniger als 1 000 € wert.



$$3. W_1 = 1\,800\text{€} \cdot 1,015^1 = 1\,827\text{€}$$

Katharina erhält im 1. Jahr 27 € Zinsen.

$$W_8 = 1\,800 \cdot 1,015^8 \approx 2\,027,69\text{€}$$

Nach 8 Jahren hat sie mehr als 2 000 € auf ihrem Konto.

$$4. 18\text{cm} : 1,2\text{cm/h} = 15\text{h}$$

Nach 15 Stunden ist die Kerze komplett abgebrannt.

$$5. W_4 = 70\,000 \cdot 4^4 = 17\,920\,000$$

Nach 4 Tagen sind es 17,92 Millionen Bakterien.

$$W_7 = 70\,000 \cdot 4^7 = 1\,146\,880\,000 \approx 1,147\text{Mrd}$$

Nach 7 Tagen sind es mehr als 1 Milliarde Bakterien.

$$6. V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$= \pi \cdot (0,65\text{m})^2 \cdot 0,25\text{m} \approx 0,332\text{m}^3 \approx 332\text{l}$$

Zu Beginn sind 332l im Becken.

$$212\text{l} = \pi \cdot (0,65\text{m})^2 \cdot h$$

$$\frac{212\text{l}}{\pi \cdot (0,65\text{m})^2} \approx 0,160\text{m} = 16\text{cm}$$

Das Wasser steht nach 5 Tagen noch 16cm hoch.

$$332\text{l} - 5 \cdot 24\text{l} = 212\text{l}$$

Nach 5 Tagen sind 212l im Becken.

$$7. 18\text{€} = 1\,800\text{ct}$$

$$1\,800\text{ct} : 11\text{ct} \approx 163,6$$

Benjamin kann 163 Minuten telefonieren, ohne sein Guthaben zu überziehen.

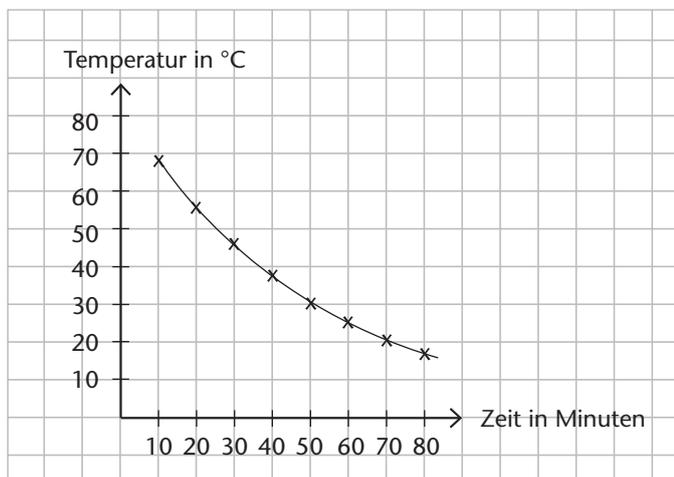
$$16 \cdot 11\text{ct} = 176\text{ct} = 1,76\text{€}$$

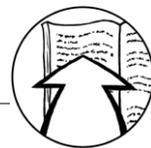
Um 16 Minuten lang zu telefonieren, muss er 1,76€ bezahlen.

$$8. W_{60} = 85\text{°C} \cdot 0,98^{60} \approx 25,29\text{°C}$$

Nach 1 Stunde hat der Tee eine

Temperatur von 25 °C.





Sachsituationen

M3



Tobias spart jeden Monat 1 €.

Um eine Minute lang zu telefonieren, zahlt Benjamin 11 ct.

Eine Kerze brennt pro Stunde 1,2 cm ab.

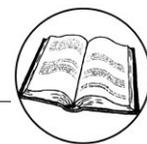
Aus einem undichten Planschbecken fließen täglich 24 l Wasser heraus.

Die Anzahl der Bakterien vervierfacht sich täglich.

Ein Geldbetrag wird jährlich mit 1,5 % verzinst.

Der Wert eines Autos sinkt jährlich um 18 %.

Eine Tasse Tee kühlt jede Minute um 2 % ab.



8. Parabelspiele (Parabeln genau beschreiben und untersuchen)

Zeitbedarf

45 Minuten

Voraussetzungen

Die S. kennen den Umgang mit der Normalparabel und mit Wertetabellen.

Kompetenzen

- S. vergleichen verschiedene Parabeln miteinander.
- S. beschreiben verschiedene Parabeln genau.
- S. nähern sich der Formel $f(x) = ax^2 + c$ an.

Differenzierung

Die Arbeitsblätter (**M3–M5**) in der Erarbeitungsphase sind im Schwierigkeitsgrad ansteigend (**M3** leicht, **M4** mittel, **M5** schwer), sodass eine Dreifachdifferenzierung möglich ist.

Vorbereitung

- Parabeln (**M1**) für die Tafel vergrößert kopieren und ausschneiden
- Stichwortkarten (**M2**) für die Tafel vergrößert kopieren und ausschneiden
- Arbeitsblätter (**M3–M5**) in ausreichender Zahl kopieren
- Material für die Erstellung der Merkplakate bereitlegen: große Plakate, dicke Filzstifte, Scheren, Klebstoff

Ablauf

Motivation/Themenfindung

- L. hängt die Parabeln (**M1**) nacheinander an die Tafel.
- S. äußern sich dazu und beschreiben die Parabeln, am besten im Vergleich zur Normalparabel. Dabei können die Lage innerhalb des Koordinatensystems, der Scheitelpunkt etc. thematisiert werden.
- L. hängt passende Stichwortkarten (**M2**) zu den entsprechenden Parabeln an die Tafel. Ggf. ergänzt er weitere Stichwörter.

Arbeitsauftrag

- L. erklärt: „Ihr seht, es gibt noch viele andere Parabeln außer der Normalparabel. In der folgenden Arbeitsphase beschäftigt ihr euch mit einigen dieser Parabeln genauer. Am Ende der Stunde werdet ihr noch mehr über diese Parabeln herausgefunden haben.“
- L. klappt die Tafel zu und gibt den Hinweis, dass bei Schwierigkeiten an der Tafel nachgeschaut werden kann.

Erarbeitung

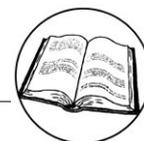
- L. teilt die Materialien aus. Jeder S. erhält ein Arbeitsblatt (**M3–M5**). Die Festlegung, wer welche Schwierigkeitsstufe bearbeitet, kann vom L. getroffen oder von den S. selbst bestimmt werden.
- S. bearbeiten in Einzel- oder Partnerarbeit das jeweilige Arbeitsblatt.
- L. steht dabei beratend zur Verfügung und verweist bei Schwierigkeiten auf den verdeckten Tafelanschrieb.

Präsentation der Ergebnisse

- Einzelne S. tragen ihre Ergebnisse vor.
- Weitere S. mit demselben Arbeitsblatt ergänzen oder korrigieren. Begonnen wird mit **M3**, anschließend folgen **M4** und **M5**.
- Die passenden Funktionsgleichungen werden an der Tafel ergänzt und näher betrachtet. Dabei wird auf die Faktoren a und c genau eingegangen und deren Bedeutung für die Parabel erläutert.

Abschluss und Ausblick

- Die S. fertigen aus den Materialien an der Tafel ein Merkplakat für das Klassenzimmer an. Dazu werden die Materialien aufgeklebt und ggf. durch eigene Kommentare und Hinweise ergänzt.
- Die Plakate werden im Klassenzimmer aufgehängt.



Möglicher Tafelanschrieb

$f(x) = x^2$	$f(x) = -x^2$	$f(x) = 2x^2$	$f(x) = \frac{1}{2} x^2$	$f(x) = -1,5x^2 + 4$	$f(x) = \frac{1}{4} x^2 - 2$
nach oben geöffnete Normalparabel	nach unten geöffnete Normalparabel	nach oben geöffnete Parabel	nach oben geöffnete Parabel	nach unten geöffnete Parabel	nach oben geöffnete Parabel
Scheitel (0 0)	Scheitel (0 0)	Scheitel (0 0)	Scheitel (0 0)	Scheitel (0 4)	Scheitel (0 -2)
				Scheitel auf der y-Achse nach oben verschoben	Scheitel auf der y-Achse nach unten verschoben
		„schmäler“ als eine Normalparabel	„breiter“ als eine Normalparabel	„schmäler“ als eine Normalparabel	„breiter“ als eine Normalparabel
		gestreckt	gestaucht	gestreckt	gestaucht



Lösungen

M3

Parabel 1

nach oben geöffnete Normalparabel
Scheitel (0|0)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Parabel 2

nach unten geöffnete Normalparabel
Scheitel (0|0)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

- Mir fällt auf, dass in der rechten Wertetabelle dieselben Zahlen wie links stehen, allerdings haben sie immer ein - davor.
- Vor dem x müsste ein - stehen, also $f(x) = -x^2$. Dann erhält man dieselben Ergebnisse, jedoch mit negativem Vorzeichen.