

Mathe Tandem: Analysis II (Differenzial- und Integralrechnung)

Hinweis: Tandems, die hier mit einem Stern markiert sind, sind auch „rückwärts“ einsetzbar. D.h. ein Partner¹ liest die komplette Lösung einer beliebigen Aufgabe vor, ohne die Aufgabennummer zu nennen. Der andere gibt die Nummer der Aufgabe an.

Dieses Vorgehen eignet sich entweder für Paare, die schneller fertig sind, oder als gesonderte Übung für alle. Ggf. kann das Tandem zuvor umgedreht werden, um die Aufgaben zu tauschen.

1. Rekonstruktion von Funktionen

Anhand der Informationen über den Graphen alle zum Aufstellen der Funktionsgleichung notwendigen Bedingungen finden.

Hinweis: Die hinreichenden Bedingungen, die danach überprüft werden müssten, sind in der Lösung nicht enthalten! Dies kann ggf. zuvor oder im Anschluss mit der Lerngruppe kurz thematisiert werden.

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung *

Dem Graph der Funktion muss der Graph der Ableitung zugeordnet werden.

3. Aussagen zu Ableitungen

Aussagen zum Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen müssen als richtig oder falsch erkannt und ggf. berichtigt werden.

4. Ableitung ganzrationaler Funktionen I (ohne Parameter) *

Bilden der 1. Ableitung mit Hilfe der Potenzregel, Summenregel und konstanter-Faktor-Regel.

5. Ableitung ganzrationaler Funktionen II (mit Parameter) *

Bilden der 1. Ableitung von Funktionen, die u.U. einen Parameter enthalten. Anwendung der Potenzregel, Summenregel und konstanter-Faktor-Regel. Es ist darauf zu achten, welches die Variable ist!

6. Ableitung einfacher rationaler und Wurzel-Funktionen *

Bilden der 1. Ableitung von Funktionen mit gebrochenen oder negativen Exponenten, hier als Wurzel oder Bruch geschrieben. Anwendung der Potenz-, Summen- und konstanter-Faktor-Regel.

Bei der Funktion ist der Definitionsbereich angegeben, auf dem die Funktion differenzierbar ist.

Aus Platzgründen wurde bei der Lösung bzw. Ableitung auf die Angabe des Definitionsbereichs verzichtet.

7. Ableitung der e-Funktion

Bilden der 1. Ableitung der e-Funktion mit Kettenregel.

Bei der jeweils letzten Aufgabe kommt auch die Produktregel vor (ggf. kann man diese auslassen).

8. Ableitung mit Produkt- und Kettenregel

Bilden der 1. Ableitung mit Produkt- und Kettenregel. Hier stehen trigonometrische Funktionen und die e-Funktion im Vordergrund.

9. Stammfunktion *

Bilden der Stammfunktion von ganzrationalen Funktionen (und einer rationalen Funktion), auch mit Parameter.

10. Integrale *

Dem Integral eine Stammfunktion zuordnen und den Wert des Integrals zwischen den gegebenen Grenzen berechnen. Es kommen nur ganzrationale Funktionen vor, da das Einsetzen der Grenzen und die Berechnung des Werts des Integrals bei trigonometrischen und e-Funktionen im Kopf schwierig ist.

Wird das Tandem „rückwärts“ eingesetzt, wird nur der Buchstabe und damit die Stammfunktion vorgegeben und es muss das passende Integral gefunden und die zugehörige Aufgabennummer genannt werden.

11. Lineare Substitution *

Bilden der Stammfunktion von verketteten Funktionen mit linearer innerer Funktion, z.T. mit Parameter. Es kommen ganzrationale und trigonometrische Funktionen, e-Funktionen und eine rationale Funktion vor.

Hinweise zur Arbeit mit den Tandemblättern:

Die Tandems sind in beliebiger Reihenfolge einsetzbar.

Didaktische Hinweise:

Die hier gesammelten Tandemarbeitsblätter sind für die **mündliche Partnerarbeit** gedacht und eignen sich vor allem für eine **erste Übung** von neu erlerntem Stoff. Natürlich können die Tandems auch zur Wiederholung, z.B. für die Vorbereitung auf eine Klausur oder auf das Abitur, eingesetzt werden.

Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist von leicht bis mittelschwer einzustufen, wobei alle Übungen für die mündliche Arbeit gedacht und daher so gehalten sind, dass keine schriftlichen Rechnungen notwendig sind und der Taschenrechner nicht verwendet wird.

Da Hinweise zum Lösungsweg oft nicht oder nur in geringem Umfang enthalten sind, sollte das Thema zuvor von allen Schülern¹ weitgehend verstanden sein. Ggf. bietet es sich an, leistungsschwachen Schülern einen leistungsstärkeren Partner¹ zuzuteilen.

Mit Hilfe dieser Partnerarbeitsform können Sie die **Zeit im Unterricht effektiv nutzen**, da alle Schüler gleichzeitig üben und zugleich Verantwortung für ihr Lernen bzw. das Lernen des Partners übernehmen. Auch oder sogar gerade in schwierigen und leistungsschwachen Lerngruppen werden Sie mit dieser Lernform positive Erfahrungen machen!

Aufbau der Tandemblätter:

Auf jeder DIN A 4-Seite ist dasselbe Tandemarbeitsblatt viermal abgedruckt. Jede DIN A 4-Seite ist dreimal enthalten, sodass jeweils 12 gleichartige Tandemblätter vorliegen, mit denen **bis zu 24 Schüler gleichzeitig** arbeiten können. Für große Klassen können Sie die Tandems auch kopieren.

Die Tandems müssen nur noch zerschnitten werden und sind **sofort einsatzbereit!** Da sie auf stärkerem Papier gedruckt sind, sind sie mehrfach verwendbar. Am besten weisen Sie die Schüler darauf hin, dass sie nicht darauf schreiben und die Tandems nicht verknicken.

Die Tandemblätter sind beidseitig bedruckt. Auf jeder Seite befinden sich die **eigenen Aufgaben** sowie die **Lösungen des Partners** von den Aufgaben auf der anderen Seite! Die Überschrift gibt das Thema an und in der rechten oberen Ecke steht, wer Vorderseite A bzw. Rückseite B hat.

Die Autorin und der Verlag danken für die Erlaubnis, die mit GeoGebra erstellten Grafiken in diesem Band abzdrukken.

Durchführung:

Je zwei Schüler erhalten ein Tandemblatt. Sie sitzen einander gegenüber bzw. so nebeneinander, dass sie nur ihre Seite des Arbeitsblatts sehen können.

„A“ beginnt mit der 1. Aufgabe. „A“ löst diese im Kopf und teilt „B“ das Ergebnis mit. „B“ kann das Ergebnis anhand der abgedruckten Lösung auf seiner Seite kontrollieren und gegebenenfalls korrigieren. Er sollte jedoch dem Mitschüler Gelegenheit geben, ein falsches Ergebnis zunächst selbst zu verbessern.

Dann ist „B“ mit seiner 1. Aufgabe an der Reihe und „A“ übernimmt die Kontrolle. Auf diese Weise arbeiten die Schüler abwechselnd und bekommen eine sofortige Rückmeldung zu ihren Ergebnissen.

Wenn ein Team schneller fertig ist als die anderen, kann der Tandembogen umgedreht werden und jeder löst die Aufgaben, die zuvor der andere hatte. So können schnellere Schüler weiter beschäftigt werden und einen zusätzlichen Trainingseffekt erzielen. Durch Untätigkeit entstehende Unruhe in der Klasse wird vermieden. Alternativ kann auch die Arbeit vorzeitig unterbrochen werden, sodass langsamere Schüler ggf. nicht alle Aufgaben lösen.

Viele Tandems können auch „rückwärts“ eingesetzt werden. Dazu werden die Lösungen in beliebiger Reihenfolge vorgelesen und es muss die passende Aufgabennummer herausgefunden werden. Das Tandemblatt kann hierzu zuerst umgedreht werden, damit die Aufgaben getauscht werden.

Viel Spaß und Erfolg beim Einsatz wünschen Ihnen das Kohl-Verlagsteam und

Jutta Stecker



¹ Mit dem Begriff „Schüler“, „Partner“ usw. sind im ganzen Band selbstverständlich bezeichneter und nicht eingeschlossen.

1. Rekonstruktion von Funktionen

A

Finden Sie alle notwendigen Bedingungen! K sei der Graph der Funktion f.

- Lösungen von B:**
- $f(0) = -4$
 - $f(-1) = 0$ und $f(2) = 0$
 - $f(-3) = 2$ und $f''(-3) = 0$
 - $f(1) = -2$ und $f'(1) = 0$
 - $f(-1) = \frac{1}{3}$ und $f'(-1) = 0$ und $f(-1) = -\frac{1}{3}$
 - $f(5) = 2$ und $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 0$
 - $f(1,5) = 4$ und $f'(1,5) = 0$
 - $f(0,5) = -2$
 - $f(0) = 0$
 - $f(1) = 2$ und $f'(1) = -1$.

- K geht durch $P(2|4)$
- K hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt.
- K hat den Tiefpunkt $T(-2|1)$.
- K hat an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle.
- K hat den y-Achsenabschnitt 2.
- K hat den Wendepunkt $(1|1)$.
- K hat im Wendepunkt $W(-2|4)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m_t = 3$.
- K ist im Punkt $P(1|3)$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.
- K hat im Punkt $Q(-\frac{1}{2} | -\frac{3}{4})$ eine horizontale Tangente.
- K verläuft an der Stelle $x = 2$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -0,5x + 2$.

1. Rekonstruktion von Funktionen

A

Finden Sie alle notwendigen Bedingungen! K sei der Graph der Funktion f.

- Lösungen von B:**
- $f(0) = -4$
 - $f(-1) = 0$ und $f(2) = 0$
 - $f(-3) = 2$ und $f''(-3) = 0$
 - $f(1) = -2$ und $f'(1) = 0$
 - $f(-1) = \frac{1}{3}$ und $f'(-1) = 0$ und $f(-1) = -\frac{1}{3}$
 - $f(5) = 2$ und $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 0$
 - $f(1,5) = 4$ und $f'(1,5) = 0$
 - $f(0,5) = -2$
 - $f(0) = 0$
 - $f(1) = 2$ und $f'(1) = -1$.

- K geht durch $P(2|4)$
- K hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt.
- K hat den Tiefpunkt $T(-2|1)$.
- K hat an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle.
- K hat den y-Achsenabschnitt 2.
- K hat den Wendepunkt $(1|1)$.
- K hat im Wendepunkt $W(-2|4)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m_t = 3$.
- K ist im Punkt $P(1|3)$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.
- K hat im Punkt $Q(-\frac{1}{2} | -\frac{3}{4})$ eine horizontale Tangente.
- K verläuft an der Stelle $x = 2$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -0,5x + 2$.

1. Rekonstruktion von Funktionen

A

Finden Sie alle notwendigen Bedingungen! K sei der Graph der Funktion f.

- Lösungen von B:**
- $f(0) = -4$
 - $f(-1) = 0$ und $f(2) = 0$
 - $f(-3) = 2$ und $f''(-3) = 0$
 - $f(1) = -2$ und $f'(1) = 0$
 - $f(-1) = \frac{1}{3}$ und $f'(-1) = 0$ und $f(-1) = -\frac{1}{3}$
 - $f(5) = 2$ und $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 0$
 - $f(1,5) = 4$ und $f'(1,5) = 0$
 - $f(0,5) = -2$
 - $f(0) = 0$
 - $f(1) = 2$ und $f'(1) = -1$.

- K geht durch $P(2|4)$
- K hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt.
- K hat den Tiefpunkt $T(-2|1)$.
- K hat an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle.
- K hat den y-Achsenabschnitt 2.
- K hat den Wendepunkt $(1|1)$.
- K hat im Wendepunkt $W(-2|4)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m_t = 3$.
- K ist im Punkt $P(1|3)$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.
- K hat im Punkt $Q(-\frac{1}{2} | -\frac{3}{4})$ eine horizontale Tangente.
- K verläuft an der Stelle $x = 2$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -0,5x + 2$.

1. Rekonstruktion von Funktionen

A

Finden Sie alle notwendigen Bedingungen! K sei der Graph der Funktion f.

- Lösungen von B:**
- $f(0) = -4$
 - $f(-1) = 0$ und $f(2) = 0$
 - $f(-3) = 2$ und $f''(-3) = 0$
 - $f(1) = -2$ und $f'(1) = 0$
 - $f(-1) = \frac{1}{3}$ und $f'(-1) = 0$ und $f(-1) = -\frac{1}{3}$
 - $f(5) = 2$ und $f'(5) = 0$ und $f''(5) = 0$
 - $f(1,5) = 4$ und $f'(1,5) = 0$
 - $f(0,5) = -2$
 - $f(0) = 0$
 - $f(1) = 2$ und $f'(1) = -1$.

- K geht durch $P(2|4)$
- K hat an der Stelle $x = 5$ einen Hochpunkt.
- K hat den Tiefpunkt $T(-2|1)$.
- K hat an der Stelle $x = 3$ eine Nullstelle.
- K hat den y-Achsenabschnitt 2.
- K hat den Wendepunkt $(1|1)$.
- K hat im Wendepunkt $W(-2|4)$ eine Wendetangente mit der Steigung $m_t = 3$.
- K ist im Punkt $P(1|3)$ parallel zur 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.
- K hat im Punkt $Q(-\frac{1}{2} | -\frac{3}{4})$ eine horizontale Tangente.
- K verläuft an der Stelle $x = 2$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -0,5x + 2$.

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung B

Lösungen von A:	Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu: Graph von f	
1. c		
2. d		
3. f		
4. e		
5. b		
6. a		

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung B

Lösungen von A:	Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu: Graph von f	
1. c		
2. d		
3. f		
4. e		
5. b		
6. a		

zur Vollversion

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung B

Lösungen von A:	Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu: Graph von f	
1. c		
2. d		
3. f		
4. e		
5. b		
6. a		

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung B

Lösungen von A:	Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu: Graph von f	
1. c		
2. d		
3. f		
4. e		
5. b		
6. a		



2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung A

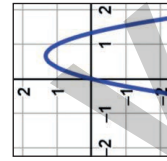
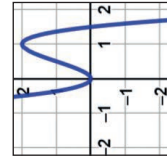
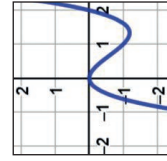
2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung A

Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu:

Graph von f

Graph von f'

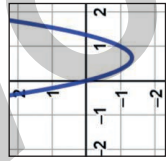
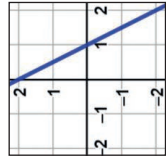
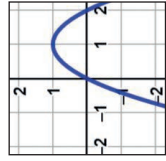
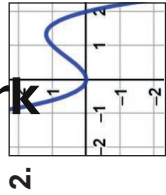
Lösungen von B:



1. f

2. e

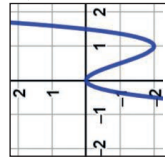
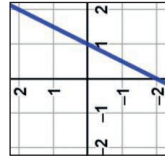
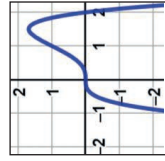
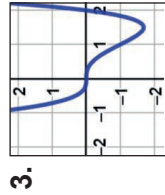
2.



3. a

4. C

3.



5. b

6. d

2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung A

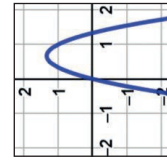
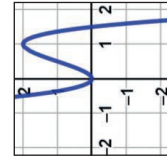
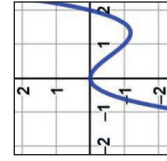
2. Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung A

Ordnen Sie dem Graph von f den Graphen von f' zu:

Graph von f

Graph von f'

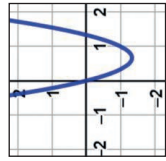
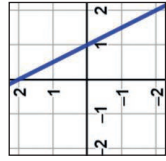
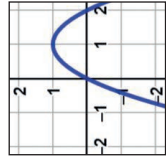
Lösungen von B:



1. f

2. e

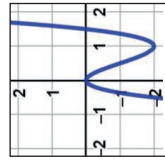
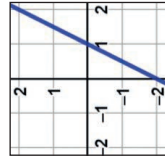
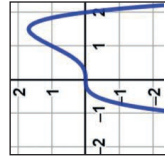
2.



3. a

4. C

3.



5. b

6. d

zur Vollversion

4. Ableitung ganzrationaler Funktionen I B

Lösungen von A:	Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion!
1. $f'(x) = 5x^4$	1. $f(x) = x^7$
2. $f'(x) = 12x^3$	2. $f(x) = x^4 - x^3$
3. $f'(x) = 3x^2 - 1$	3. $f(x) = 5x^3 + 2x$
4. $f'(x) = 12x^5 - 9x^2$	4. $f(x) = x + 6$
5. $f'(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$	5. $g(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - 0,5x^3$
6. $f'(x) = 1,2x^2 - 1,2x$	6. $f(x) = 2(x^2 - 4x + 1)$
7. $f'(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{6}$	7. $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2$
8. $g'(x) = 3 \cdot (2x - 4) = 6x - 12$	8. $f(s) = \frac{s^4}{4} - \frac{2s^3}{9} + \frac{s}{4} + \frac{3}{4}$
9. $h'(t) = 9,6t^3 - 6,9t^2 + 5,6$	9. $h(a) = (a - 2)^2$
10. $f(b) = 2 + 2b$	10. $f(x) = 1,3x^4 + 2,4x^3 - 2,8x^2$

4. Ableitung ganzrationaler Funktionen I B

Lösungen von A:	Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion!
1. $f'(x) = 5x^4$	1. $f(x) = x^7$
2. $f'(x) = 12x^3$	2. $f(x) = x^4 - x^3$
3. $f'(x) = 3x^2 - 1$	3. $f(x) = 5x^3 + 2x$
4. $f'(x) = 12x^5 - 9x^2$	4. $f(x) = x + 6$
5. $f'(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$	5. $g(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - 0,5x^3$
6. $f'(x) = 1,2x^2 - 1,2x$	6. $f(x) = 2(x^2 - 4x + 1)$
7. $f'(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{6}$	7. $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2$
8. $g'(x) = 3 \cdot (2x - 4) = 6x - 12$	8. $f(s) = \frac{s^4}{4} - \frac{2s^3}{9} + \frac{s}{4} + \frac{3}{4}$
9. $h'(t) = 9,6t^3 - 6,9t^2 + 5,6$	9. $h(a) = (a - 2)^2$
10. $f(b) = 2 + 2b$	10. $f(x) = 1,3x^4 + 2,4x^3 - 2,8x^2$

4. Ableitung ganzrationaler Funktionen I B

Lösungen von A:	Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion!
1. $f'(x) = 5x^4$	1. $f(x) = x^7$
2. $f'(x) = 12x^3$	2. $f(x) = x^4 - x^3$
3. $f'(x) = 3x^2 - 1$	3. $f(x) = 5x^3 + 2x$
4. $f'(x) = 12x^5 - 9x^2$	4. $f(x) = x + 6$
5. $f'(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$	5. $g(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - 0,5x^3$
6. $f'(x) = 1,2x^2 - 1,2x$	6. $f(x) = 2(x^2 - 4x + 1)$
7. $f'(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{6}$	7. $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2$
8. $g'(x) = 3 \cdot (2x - 4) = 6x - 12$	8. $f(s) = \frac{s^4}{4} - \frac{2s^3}{9} + \frac{s}{4} + \frac{3}{4}$
9. $h'(t) = 9,6t^3 - 6,9t^2 + 5,6$	9. $h(a) = (a - 2)^2$
10. $f(b) = 2 + 2b$	10. $f(x) = 1,3x^4 + 2,4x^3 - 2,8x^2$

4. Ableitung ganzrationaler Funktionen I B

Lösungen von A:	Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion!
1. $f'(x) = 5x^4$	1. $f(x) = x^7$
2. $f'(x) = 12x^3$	2. $f(x) = x^4 - x^3$
3. $f'(x) = 3x^2 - 1$	3. $f(x) = 5x^3 + 2x$
4. $f'(x) = 12x^5 - 9x^2$	4. $f(x) = x + 6$
5. $f'(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$	5. $g(x) = -0,2x^5 + 0,5x^4 - 0,5x^3$
6. $f'(x) = 1,2x^2 - 1,2x$	6. $f(x) = 2(x^2 - 4x + 1)$
7. $f'(t) = \frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{1}{6}$	7. $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^2$
8. $g'(x) = 3 \cdot (2x - 4) = 6x - 12$	8. $f(s) = \frac{s^4}{4} - \frac{2s^3}{9} + \frac{s}{4} + \frac{3}{4}$
9. $h'(t) = 9,6t^3 - 6,9t^2 + 5,6$	9. $h(a) = (a - 2)^2$
10. $f(b) = 2 + 2b$	10. $f(x) = 1,3x^4 + 2,4x^3 - 2,8x^2$

zur Vollversion