I.E.28

Stochastik

Der Erwartungswert – Gewinn beim Glücksspiel?

Nach einer Idee von Alessandro Totaro
Illustrationen von Oliver Wetterauer

© Leland Bobbe/DigitalVision

Vorschau

Stürze ich mich mit einem Glücksspiel langfristig in den Ruin oder kann ich damit doch auf lange Sicht reich werden? – Hier lernen Ihre Schülerinnen und Schüler den Erwartungswert und den Begriff des fairen Spiels kennen und erfahren damit eine Größe, mit der sie diese Fragen fundiert beurteilen können!

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	9/10
Dauer:	2–3 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erwartungswert, faires Spiel
Kompetenzen:	mathematische Probleme lösen (K2); mathematisch modellieren (K3); mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

netzwerk lernen
zur Vollversion

Auf einen Blick

Bi = Bildimpuls, Ab = Arbeitsblatt, As = Aufschrieb, Sp = Spiel

Einstieg

M 1	(Bi)	Glücksspiele auf dem Jahrmarkt – Wie viel Gewinn kann ich auf Dauer erwarten?

Erarbeitung

M 2	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel

Ergebnissicherung

M 3	(As)	Erwartungswert und faires Spiel

Übung

M 4	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel berechnen
M 5	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel vertieft
M 6	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel weitergedacht und kreativ
M 7	(Ab)	Erwartungswert zum Differenzieren

Kreative/spielerische Übung

M 8	(Sp)	Memory zu den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit

VORSCHAU

© RAABE 2021

netzwerk lernen

zur Vollversion

Minimalplan

Ihre Zeit ist knapp? Dann wählen Sie die Übungsaufgaben gezielt aus oder geben diese als Hausaufgabe oder Prüfungsvorbereitung den Lernenden zur selbstständigen Bearbeitung auf.
Denkbar wäre unter anderem folgende verkürzte Version:

M 1	(Bi)	Glücksspiele auf dem Jahrmarkt – Wie viel Gewinn kann ich auf Dauer erwarten?
M 2	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel **Aufgabe 1–4**
M 3	(As)	Erwartungswert und faires Spiel
M 4	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel berechnen **Aufgabe 1**
M 5	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel vertieft **Aufgabe 2**
M 6	(Ab)	Erwartungswert und faires Spiel weitergedacht und kreativ **Aufgabe 2**

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.		
●	■	▲
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

★	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.
💡	Dieses Symbol markiert Tipps.
!	Dieses Symbol markiert Merksätze.
Y	Dieses Symbol markiert alternative Möglichkeiten.

© RAABE 2021

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 1 Einstieg: Glücksspiele auf dem Jahrmarkt – Wie viel Gewinn kann ich auf Dauer erwarten?

Grafik: Oliver Wetterauer

Aufgabe

a) **Beschreibe** das Bild.

b) **Triff** eine **begründete Entscheidung** darüber, ob und mit welchem Spiel du wohl dein Taschengeld aufwerten kannst.

c) **Nenne** die **Faktoren,** die zur Entscheidung, ob du bei einem Glücksspiel einen Gewinn erzielen kannst oder Verlust machst, eine Rolle spielen.

VORSCHAU

© RAABE 2021

netzwerk lernen
zur Vollversion

Erarbeitung: Erwartungswert und faires Spiel M 2

Hier erarbeitest du, was die Begriffe Erwartungswert und faires Spiel bedeuten und wie man diese berechnet.

Aufgabe 1

In den Tabellen sind die Größen, die für die Beurteilung, ob man von einem Spiel Gewinn oder Verlust erwarten kann, von Bedeutung sind, aufgeführt.

Fülle die Tabelle mit den Informationen aus dem Bild von M 1 **aus.**

a) Die Glückswürfel

Ereignis	Einsatz	Ausschüttung	Wahrscheinlichkeit (P)
„Es wird zweimal 5 oder zweimal 6 gewürfelt."			
„Es wird nicht zweimal 5 oder zweimal 6 gewürfelt."			

b) Das Glücksrad

Ereignis	Einsatz	Ausschüttung	Wahrscheinlichkeit (P)
grünes Feld			
blaues Feld			
rotes Feld			

Nur mithilfe der Tabelle würde es uns wahrscheinlich noch schwerfallen, eine Aussage darüber zu treffen, ob wir langfristig mit einem Spiel einen Gewinn erzielen oder einen Verlust erleiden. Aussagekräftig wird es erst, wenn wir die Größen miteinander in Beziehung setzen. Dies können wir mithilfe des Erwartungswertes. Der Erwartungswert *(abgekürzt: E)* ist ein Wert, durch den wir erkennen, mit welchem Gewinn oder Verlust wir über längere Sicht, also wenn wir das Spiel sehr oft spielen würden, rechnen können.

Aufgabe 2

a) Erwartungswert aus Sicht der Kunden *(X = Gewinn/Verlust für die Kunden)*:

Die Glückswürfel: $E(X) = \frac{1}{18} \cdot (20\,€ - 3\,€) + \frac{17}{18} \cdot (0\,€ - 3\,€) = -1{,}89\,€$

Das Glücksrad: $E(X) = \frac{1}{4} \cdot (5\,€ - 2\,€) + \frac{1}{4} \cdot (7\,€ - 2\,€) + \frac{1}{2} \cdot (0\,€ - 2\,€) = 1\,€$

Leite aus den beiden Beispielen eine allgemeine Formel zur Berechnung des Erwartungswertes aus Sicht der Kunden **her:** _____

© RAABE 2021

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

M 3 Ergebnissicherung: Erwartungswert und faires Spiel

Erwartungswert

Den **Erwartungswert** (E) kann man als langfristig zu erwartenden, durchschnittlichen Gewinn/Verlust pro Spiel interpretieren.
Die Formel zur Berechnung des Erwartungswertes lautet:

$$E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \ldots + P_n \cdot (a_n - e)$$

E = Erwartungswert; P = Wahrscheinlichkeit; a = Ausschüttung; e = Einsatz

Faires Spiel

Ein Spiel heißt **fair**, wenn sich auf lange Sicht Einsatz und Gewinn ausgleichen.
Bei einem fairen Spiel ist der Erwartungswert 0:

$$E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \ldots + P_n \cdot (a_n - e) = 0$$

E = Erwartungswert; P = Wahrscheinlichkeit; a = Ausschüttung; e = Einsatz

Strategie-Tippkarte: Berechnung des Erwartungswerts

1. Verwende eine **Tabelle**, um dir einen Überblick zu verschaffen:

Ereignis	Einsatz (e)	Ausschüttung (a)	Wahrscheinlichkeit (P)

2. **Definiere** die Zufallsvariable X. Überlege dir hierzu, ob du den Gewinn/Verlust aus der Sicht des Anbieters oder der Kunden berechnen willst.
X = Gewinn/Verlust für Anbieter oder **X = Gewinn/Verlust für Kunden**

3. Wende nun die Formel für den Erwartungswert an.
   - Falls X = Gewinn/Verlust für Kunden
   => $E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \ldots + P_n \cdot (a_n - e)$
   (Versetze dich in die Kunden: für dich wäre der Einsatz etwas Negatives, du musst ja etwas zahlen; die Ausschüttung etwas Positives, du bekommst ja etwas.)
   - Falls X = Gewinn/Verlust für Anbieter
   => $E(X) = P_1 \cdot (-a_1 + e) + P_2 \cdot (-a_2 + e) + \ldots + P_n \cdot (-a_n + e)$
   (Versetze dich in den Anbieter: für dich wäre der Einsatz etwas Positives, die Kunden zahlen das ja an dich; die Ausschüttung etwas Negatives, du musst das den Kunden ja auszahlen.)

4. Denke daran, dass dieser Wert den langfristigen Gewinn oder Verlust pro Spiel angibt.

VORSCHAU

© RAABE 2021

netzwerk lernen
zur Vollversion

Übung: Erwartungswert und faires Spiel weitergedacht und kreativ

M 6

Aufgabe 1

Die Klasse 10a möchte die Tombola veranstalten. Ein Los soll 2 € kosten. Auch der Preis für einen Kleingewinn steht schon fest:

Ein Los kostet: 2 €

Anzahl Lose	Ausschüttung pro Los
900 Nieten	0,00 €
90 Kleingewinne	5,00 €
10 Hauptgewinne	???

a) **Berechne**, wie hoch die Ausschüttung für den Hauptgewinn sein müsste, damit die Tombola fair ist.

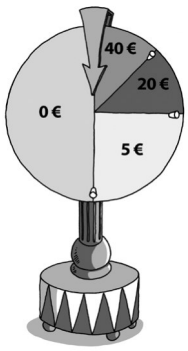
b) **Berechne**, wie hoch die Ausschüttung für den Hauptgewinn sein müsste, damit die Klasse bei 200 Kunden 100 € Gewinn macht.

Aufgabe 2

Die Klasse 10b bietet einen Stand mit Glücksrad an. Dazu basteln sie das Glücksrad rechts. Der Einsatz pro Spielrunde soll 10 € betragen.

a) **Zeige**, dass das Spiel nicht fair ist.

b) Welche Möglichkeiten gäbe es, daraus ein faires Spiel zu machen?
Finde eine Möglichkeit. Findest du eine zweite Möglichkeit?
Findest du alle Möglichkeiten?



Grafik: Oliver Wetterauer

Aufgabe 3

Glücksspiel

Spielt zu zweit. Ihr braucht einen Würfel und jeweils 8 Steine. Würfelt abwechselnd.

Spieler 1: Du bekommst einen Stein von Spieler 2, wenn du eine 5 oder eine 6 würfelst.

Spieler 2: Du bekommst zwei Steine von Spieler 1, wenn du eine 3 würfelst.

a) **Beurteile**, ob es sich hierbei um ein faires Spiel handelt.

b) **Nenne** die Anzahl der Steine, die jeder Spielpartner nach 10 Runden haben sollte, wenn es sich um ein faires Spiel handelt.

c) **Spielt** das Spiel 10 Runden lang. Habt ihr nun die Anzahl der Steine, die ihr in b) vermutet hattet? Falls nein, **begründe**, warum dem so sein könnte.

Aufgabe 4

Überlege dir selbst

a) ein faires Glücksspiel.

b) ein trickreiches Glücksspiel, bei dem ganz schwer zu erkennen ist, dass es gar nicht fair ist.

© RAABE 2021

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 7 Übung: Erwartungswert zum Differenzieren

Aufgabe

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

a) **Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
b) **Beurteile**, ob es sich um ein faires Spiel handelt.

Lose: © Thinkstock/iStock, Geldscheine: © colourbox

Aufgabe

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

a) **Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
b) **Berechne**, um wie viel Prozent sich der Erwartungswert erhöhen würde, wenn man die Auszahlung bei einem Hauptgewinn auf 40 € senken würde.

Lose: © Thinkstock/iStock, Geldscheine: © colourbox

Aufgabe

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

a) **Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
b) **Berechne**, wie man die Auszahlung bei einem Hauptgewinn verändern müsste, wenn man den langfristigen Gewinn pro Spiel um 20 % steigern möchte.

Lose: © Thinkstock/iStock, Geldscheine: © colourbox

VORSCHAU

© RAABE 2021

netzwerk lernen
zur Vollversion

Kreative/spielerische Übung: Memory zu den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit

M 8

Wenn Lernende bereits früher fertig sein sollten mit den Aufgaben bzw. Sie spielerisch die Festigung des Wissens ermöglichen wollen, können Sie dieses Memory nutzen.

Dieses liegt vor, wenn man z. B. eine Kugel aus einer Urne zieht	**P(A)**	Dies ist das Ereignis A.	**Ereignis**	Dies gilt, wenn der Erwartungswert null ergibt.
$\overline{A}$	Man zieht eine Kugel und legt diese wieder zurück.	**Einstufiges Zufallsexperiment**	**Ziehen ohne Zurücklegen**	**A**
Ziehen mit Zurücklegen	Es beschreibt das Ergebnis eines Zufalls-experiments.	**Zweistufiges Zufallsexperiment**	Dies ist das Gegenereignis von A.	Dies ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A.
Dieses liegt vor, wenn man z. B. zwei Kugeln aus einer Urne zieht.	**Erwartungswert**	Man zieht eine Kugel und legt sie nicht zurück.	**Faires Spiel**	Er gibt an, wie viel Gewinn man langfristig pro Spiel erzielt.

© RAABE 2021

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion