Wahrscheinlichkeit – Binomialverteilung

Erwin Kunesch, Gmund
Illustrationen von Erwin Kunesch

In diesem Beitrag finden Sie zahlreiche Aufgaben, die Sie im Unterricht zum Thema Binomialverteilung verwenden können. Beginnend bei absoluten und relativen Häufigkeiten und über Wahrscheinlichkeiten führen die Aufgaben langsam an das Thema Verteilung heran. Ihre Schülerinnen und Schüler lernen sicher mit der Binomialverteilung und ihren Kennzahlen wie dem Erwartungswert, Varianz und der Standardabweichung umzugehen.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Skystorm/iStock/Getty Images Plus
Illustrationen: Erwin Kunesch
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Wahrscheinlichkeit – Binomialverteilung

Oberstufe (Niveau)

Erwin Kunesch, Gmund

Illustrationen von Erwin Kunesch

Aufbau und Unterrichtsplanung, Einleitung	**1**
M 1 Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit – Verteilung	**3**
M 2 Binomialverteilung – Grundlegendes	**5**
M 3 Binomialverteilung in Anwendungsaufgaben	**6**
M 4 Erwartungswert – Varianz – σ-Umgebung	**7**
Lösungen	**9**

Die Schüler lernen:

zunächst mit den Begriffen „relative Häufigkeit", „Histogramm" sowie „Verteilung" und „Wahrscheinlichkeit" umzugehen, ohne sich dabei auf eine bestimmte Verteilung festzulegen. Anschließend lenken sie ihren Blick auf die Binomialverteilung. Um diese anwenden zu können, üben die Lernenden zuerst die Rechenregeln ein. Sie ermitteln die Wahrscheinlichkeitswerte mithilfe der Stochastik-Tabellen sowie mit dem Taschenrechner. Die Jugendlichen lernen anschließend den Unterschied zwischen den Formulierungen wie „höchstens", „mindestens", „mehr als", „weniger als" kennen. Schließlich wenden sie die Binomialverteilung in Textaufgaben an, was eine weitere Herausforderung darstellt, da sie zusätzlich noch die Angaben des Textes in eine mathematische Form bringen müssen. Zum Schluss erarbeiten sich die Lernenden noch die zentralen Begriffe „Erwartungswert", „Varianz" und „Standardabweichung" sowie die σ-Umgebung.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt
B = Berechnungen

Thema	Material	Methode
Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit – Verteilung	M1	Ab, B
Binomialverteilung – Grundlegendes	M2	Ab, B
Binomialverteilung in Anwendungsaufgaben	M3	Ab, B
Erwartungswert – Varianz – σ-Umgebung	M4	Ab, B

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: absolute und relative Häufigkeit, Verteilung, Histogramm, Binomialkoeffizient, Bernoullikette, Binomialverteilung, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, σ-Umgebung

Medien: Lehrbuch, Internet, Stochastik-Tabellen

Kompetenzen: Darstellungen beherrschen, Lösungen berechnen, Text in Formeln umsetzen, argumentieren, begründen

Wahrscheinlichkeit – Binomialverteilung

Aufbau und Unterrichtsplanung:

Im ersten Teil **M 1** führt der Beitrag die Schülerinnen und Schüler[1] an den Begriff der Wahrscheinlichkeit und ihrer Verteilung heran. Dabei wird die Verteilung zunächst nur allgemein behandelt. Im Teil **M 2** tritt ausführlich die formale Rechnung mit Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung in den Vordergrund. Hierbei trainieren die Lernenden den Umgang mit Tabellenwerk und Taschenrechner. Schließlich wenden Ihre Schüler in **M 3** das Erlernte über die Binomialverteilung in realitätsnahen Aufgaben an. In **M 4** erarbeiten Sie mit der Klasse dann weiterführend die in Verteilungen charakteristischen Begriffe wie Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung und σ-Umgebung. Die einzelnen Materialien können Sie prinzipiell, auch unabhängig voneinander einsetzen, je nachdem in welchem Stand der Besprechung des Themas sich Ihr Unterricht befindet. Die einzelnen Materialien eignen sich auch als Grundlage von Referaten. Auch als Wiederholung und Vertiefung in selbstständigem Studium sind die einzelnen Teile denkbar.

Wahn und Wirklichkeit – Einleitung

Seit Jahrtausenden haben nicht vorhersehbare Ereignisse wie Unglücksfälle, Naturkatastrophen oder unerwartete Begegnungen die Menschheit in Atem gehalten. Vor allem fällt dem Unerwarteten beim Spieltrieb eine besondere Bedeutung zu.
Denken wir zunächst ganz einfach an Würfel – oder bestimmte Brettspiele, bei denen durch unvorhersehbare Ergebnisse, also das Würfeln einer bestimmten Augenzahl oder die Kombination von Karten z. B. beim Austeilen eines Kartenspiels, unerwartete Spielzüge auftreten können. Ganze Spielindustrien verdienen durch geschickten Einbau von Unwägbarkeiten ihr Einkommen. Auch die gesamte Versicherungswirtschaft lebt von einer Wette auf unvorhersehbare Eintritte bzw. Nichteintritte von Ereignissen.

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

Dabei muss man sich bewusst sein, dass jedes Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit (ungleich null oder eins) auftreten kann oder auch nicht. Sei die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auch noch so klein, es kann irgendwann eintreten.
So spielen viele Menschen verbissen jede Woche mit der Hoffnung auf einen Sechser im Lotto, dessen Wahrscheinlichkeit äußerst gering ist und der trotzdem eintreten kann. Durch diese Einstellung nimmt auch leider die Spielleidenschaft an der Börse und in den Spielcasinos in beängstigendem Maße zu. So mancher hat damit sein ganzes Vermögen durchgebracht und fühlt sich nach einem entsprechenden Verlust „gezwungen", diesen fern jeglicher Realität durch weiteres Spielen wiedergutzumachen, was ihn dann aber noch tiefer in die Spielsucht zieht.

Auf dem Weg zur Binomialverteilung

Betrachten wir Vorgänge, die mehrere Ausgänge haben, die sich nicht vorhersagen lassen. Als Erstes dokumentieren wir das Auftreten der einzelnen Ergebnisse, wenn der Vorgang wiederholt wird. Damit erstellen wir eine Liste der absoluten Häufigkeiten der Ergebnisse. Diese lässt sich auch grafisch in Form von Säulendiagrammen, sogenannten Histogrammen, darstellen. Dividieren wir die absoluten Häufigkeiten durch die Gesamtzahl der Wiederholungen, so erhalten wir die relativen Häufigkeiten der Ergebnisse. Eine sehr lange Reihe dieses Vorgangs führt dann für jedes Ergebnis auf einen genaueren Wert, den wir als Wahrscheinlichkeit definieren können.
Betrachten wir nun Vorgänge (Zufallsexperimente) mit nur zwei möglichen Ausgängen, die unabhängig voneinander wiederholt werden, so führt uns das auf die Bernoulli-Kette. Bauen wir diese Theorie weiter aus, kommen wir zur Behandlung der Thematik mithilfe der Binomialverteilung.
Beispiel: Bei einem Würfelwurf werden zwei Ergebnisse definiert: „Treffer", wenn die Augenzahl sechs ist, und „kein Treffer" für alle anderen Augenzahlen. Das so definierte Zufallsexperiment hat zwei mögliche Ausgänge, deren Wahrscheinlichkeit sich nicht ändert:
$P(T) = \frac{1}{6}; \;\; P(\overline{T}) = \frac{5}{6}.$
Wenn das Zufallsexperiment wiederholt wird, beeinflussen sich die Einzelergebnisse nicht gegenseitig. Die Wiederholungen sind also voneinander unabhängig, sie stellen damit eine Bernoulli-Kette dar.

M 1 Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit – Verteilung

1. Bei der Messung des radioaktiven Zerfalls eines Elementes mit langer Halbwertszeit ergaben sich in kurzen, jeweils gleich langen Zeitintervallen folgende Impuls-Messwerte:

57	546	337	241	175	310	43
293	162	211	323	271	420	355
256	315	278	148	223	247	376
265	123	481	367	183	418	493

a) Fassen Sie diese Messergebnisse in Fünfziger-Gruppen zusammen:
Alle Werte von 0 bis 50 fallen in das Intervall 50 $\to$ $]0;50]$,
alle Werte von 51 bis 100 fallen in das Intervall 100 $\to$ $]50;100]$ usw.:
150 $\to$ $]100;150]$; 200 $\to$ $]150;200]$; 250 $\to$ $]200;250]$;
300 $\to$ $]250;300]$; 350 $\to$ $]300;350]$; 400 $\to$ $]350;400]$;
450 $\to$ $]400;450]$; 500 $\to$ $]450;500]$; 550 $\to$ $]500;550]$;

b) Erstellen Sie ein Histogramm der absoluten Häufigkeiten. Tragen Sie dabei auf der Abszisse die Gruppen von 50 bis 550 auf. Die Ordinate gibt die absolute Häufigkeit der Gruppe an. (So ist z. B. die absolute Häufigkeit der Gruppe „50" gleich 1, da nur einmal ein Wert zwischen 0 und 50 auftritt).

2. Bei einem Würfelspiel mit einem Laplace-Würfel wurden folgende absolute Häufigkeiten erzielt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	69	79	76	62	90	74

Erweitern Sie die Tabelle um die relativen Häufigkeiten und die Wahrscheinlichkeiten. Erstellen Sie dann ein Histogramm, das die relativen Häufigkeiten neben den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aufzeigt.

3. Ein Glücksrad mit den Sektoren „1", „2", „3", „4", „5", „6" wird gedreht.
Der Sektor „1" weist dabei die Flächenmaßzahl 1 auf.
Dabei ergeben sich folgende relative Häufigkeiten:

Sektor	„1"	„2"	„3"	„4"	„5"	„6"
P(X)	0,0625	0,125		0,125	0,375	0,0625

a) Berechnen Sie die relative Häufigkeit für den Sektor „3".
b) Ermitteln Sie die Flächenmaßzahlen der einzelnen Sektoren.

4. Ein Laplace-Tetraeder (vierseitiger Würfel) wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt die dabei erhaltene Augensumme an.
   a) Stellen Sie die auftretenden Ergebnisse und ihre Augensumme in einer Tabelle dar, die auch die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Augensummen enthält.
   b) Erstellen Sie das dazugehörige Histogramm von $P(X = x)$ über x.

5. Bei einer Lotterie greift man in eine Lostrommel, die mit Kugeln gefüllt ist. Die Kugeln sind von 1 bis 50 durchnummeriert. Nun wird eine Kugel gezogen.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, mit der man eine Kugel zieht, deren Nummer
   a) durch 5 teilbar ist,
   b) durch 7 teilbar ist,
   c) durch 5 oder 7 teilbar ist,
   d) durch 5 und 7 teilbar ist.

6. Bei einer Stichprobe am Flughafen werden 150 Fluggäste nach ihren Sprachkenntnissen in Englisch und Spanisch befragt. Dabei stellt sich heraus, dass 120 Personen Englisch und 70 Personen Spanisch sprechen. 49 Reisende sprechen beide Sprachen.
   Bestimmen Sie die relativen Häufigkeiten der Reisenden, die
   a) mindestens eine der beiden Sprachen sprechen,
   b) keine der beiden Sprachen sprechen.

7. Bei dem in Spielcasinos verbreiteten Glücksspiel Roulette fällt eine Kugel in eines der Fächer einer drehbaren Scheibe. Diese Fächer sind von 0 bis 36 nummeriert; dabei sind 18 Fächer rot und 18 Fächer schwarz, das Fach mit der 0 ist weiß gefärbt.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit
   a) eine bestimmte Zahl als Ergebnis zu erhalten,
   b) eine Zahl auf einem rot markierten Feld zu erhalten,
   c) eine Zahl aus dem ersten Dutzend (ohne Null) zu erhalten.

8. Auf einer Liste sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 aufgeführt. Eine Zahl wird willkürlich herausgegriffen.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahl auf eine Primzahl fällt.