Ableitung im Buchstabennetz

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber

Rätsel faszinieren Schülerinnen und Schüler seit ihrer Kindheit. Während sie beim Buchstabensalat Worte streichen und am Ende ein Lösungswort ablesen können, werden sie im vorliegenden Beitrag durch berechnete Steigungen, die ein Graph einer Funktion an einer Stelle annimmt, gelenkt, um einen Lösungssatz in einem Buchstabennetz zu finden. Der Beitrag macht sich somit den motivierenden Aspekt von Rätseln zunutze. Zur Berechnung der Steigungen müssen die Lernenden die Summen-, Produkt-, Quotienten- oder Kettenregel bei unterschiedlichen Funktionsklassen anwenden.

Ableitungen im Buchstabennetz

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber, Brilon
Illustrationen von Günther Weber

Die Schüler lernen:

die Ableitung von Exponentialfunktionen durch Anwenden der Summen-, Produkt-, (Quotienten-) und Kettenregel.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **Info** = Informationsblatt

Thema	Material	Methode
Vorlage Buchstabennetz	M1	Ab
Ableitung der Grundfunktionen und Ableitungsregeln	M2	Info
Aufgaben	M3	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Potenz-, Summen-, Produkt-, (Quotienten-) und Kettenregel bei unterschiedlichen Funktionsklassen

Medien: –

Kompetenzen: Mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Unterrichtsmethode Spiel:

Mit dieser besonderen Methode wecken Sie das Interesse und die Aufmerksamkeit Ihrer Klasse. Dadurch steigt die Lernbereitschaft und Sie erreichen, dass sich der behandelte Stoff bei den Jugendlichen nachhaltig einprägt. Das Rätsel eignet sich besonders gut, um das Können und Wissen der Klasse rund um das Thema Berechnung von Ableitungen bei verschiedenen Funktionsklassen zu festigen. Der Beitrag kann zur Freiarbeit, zur Stillbeschäftigung oder auch zum digitalen Lernen zu Hause eingesetzt werden.

Lernvoraussetzungen:

Damit die Lernenden die Aufgaben bewältigen können, müssen sie die Potenz-, Summen-, Produkt- und Kettenregel gut kennen und diese bezogen auf die verschiedenen Funktionsklassen anwenden können. Die Kenntnis der Quotientenregel ist nicht unbedingt notwendig, da der Funktionsterm in ein Produkt umgeschrieben werden kann. Den Jugendlichen bereitet die Umwandlung von Wurzeltermen bzw. gebrochen-rationalen Termen in Potenzschreibweise keine Probleme. Im günstigen Fall beherrschen die Klassenmitglieder zudem die Rechenregeln für Logarithmen.

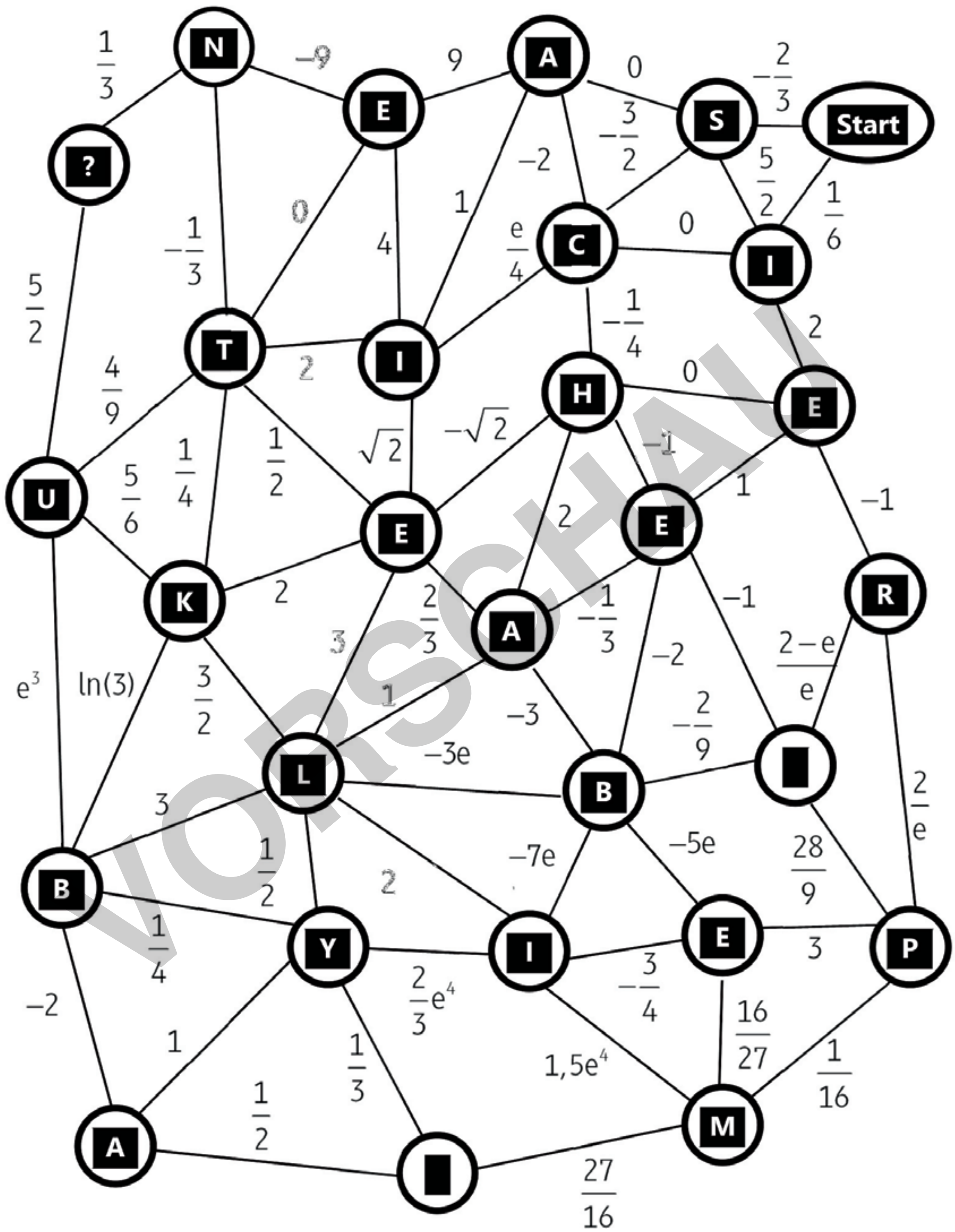
Lehrplanbezug:

Als Kompetenzerwartungen und inhaltliche Schwerpunkte bis zum Ende der Qualifikationsphase weisen die Schulentwicklungspläne für fast alle Bundesländer Folgendes aus:
Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- wenden die Faktor-, Summen-, Produktregel auf ganzrationale Funktionen und natürliche Exponentialfunktionen an bzw. wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an.

In einigen Bundesländern werden auch die Quotientenregel sowie die Ableitung weiterer Funktionen wie Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, gebrochen-rationale Funktionen und Winkelfunktionen aufgeführt.

M 1 Vorlage Buchstabennetz



Grafik: Günther Weber

M 2 Ableitung der Grundfunktionen und Ableitungsregeln

Es gilt die **Potenzregel**:

$f(x) = x^r \qquad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Vor der Ableitung sind Wurzeln und Bruchterme umzuschreiben nach der Regel

$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ und $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Für die Ableitung weiterer **Grundfunktionen** gilt:

$f(x) = c \qquad f'(x) = 0$

$f(x) = \sin(x) \qquad f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x) \qquad f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

Ableitungsregeln

Zur Ableitung von Funktionen, die sich aus mehreren Grundfunktionen zusammensetzen, benötigt man weitere Regeln:

Faktorregel:	$f(x) = a \cdot u(x)$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Summenregel:	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel:	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel:	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel:	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Lösungen

Anmerkung:
Da bei fast allen Ableitungen die Potenz- und Summenregel angewendet werden, werden diese Regeln im Folgenden nicht mit aufgezählt.

a) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ $\quad f'(x) = -\frac{2}{3}$

$f'\left(\frac{5}{8}\right) = -\frac{2}{3}$ (Die Steigung einer linearen Funktion ist für beliebige x konstant.)

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$

Umschreiben des Funktionsterms in die Potenzschreibweise ergibt

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + x^{\frac{1}{2}} - x^{-2}$$

$$f'(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-3} = x^2 - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}$$

$$f'(1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

c) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3}$

Anwenden der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\left(x^2-3\right) - \left(x+2\right)\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2} = \frac{x^2 - 3 - 2x^2 - 4x}{\left(x^2-3\right)^2} = \frac{-x^2 - 4x - 3}{\left(x^2-3\right)^2}$$

Alternativ: Umschreiben in die Potenzschreibweise mit negativen Exponenten und Anwenden der Produktregel (und Kettenregel):

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-3} = \left(x+2\right)\cdot\left(x^2-3\right)^{-1}$$

$$f(x) = 1\cdot\left(x^2-3\right)^{-1} + \left(x+2\right)\cdot\left(-1\right)\cdot 2x\cdot\left(x^2-3\right)^{-2}$$

$$= \left(x^2-3\right)^{-2}\left[\left(x^2-3\right)^{1} - \left(2x^2+4x\right)\right]$$

$$= \left(x^2-3\right)^{-2}\cdot\left[\left(-x^2-4x-3\right)\right]$$

$$f'(-1) = \frac{-1+4-3}{\left(1-3\right)^2} = 0$$