Mechanik

Gravitation – von Jules Verne bis zur Satellitenflugbahn

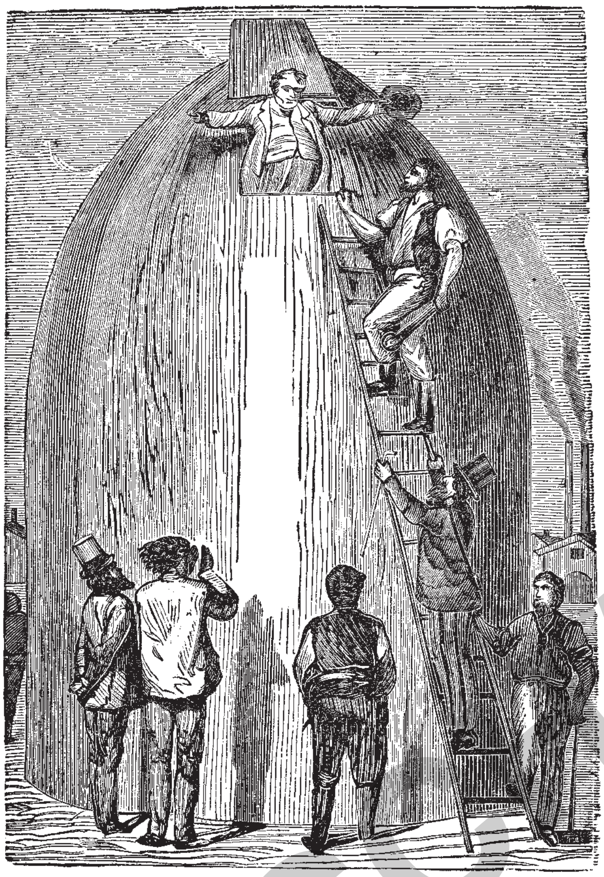
Ein Beitrag von Manfred Vogel
Illustrationen von Benjamin Streit

In diesem Beitrag werden den Schülerinnen und Schülern ausgehend von der fantastischen Utopie eines Mondflugs bei Jules Verne die physikalischen Grundlagen des Starts und der Flugbahn eines Projektils nahegebracht, um dann Bahnen von erdnahen Satelliten und Raketen der Apollo-Missionen zu berechnen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10–12
Dauer:	8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	1. Modellieren und Mathematisieren; 2. Erkennen von Zusammenhängen und kritisches Überprüfen von Berechnungen; 3. Diskutieren von Aussagen und Vergleichen mit Berechnungen
Thematische Bereiche:	Gravitation, SI-Einheiten, Geschwindigkeit und Beschleunigung, Kreisbewegung, Raketen, Satelliten

M 1 Die Mondrakete des Mr Impey Barbicane



J. T. MASTON HAD GROWN FAT.

© NNehring/DigitalVision Vectors/Getty Images

Jules Verne (1828–1905), Bestsellerautor, Naturwissenschaftler und Zukunftsforscher, schrieb den utopischen Roman „De la terre à la lune" („Von der Erde zum Mond"). Mr Impey Barbicane, ein amerikanischer ehemaliger Artillerieoffizier, will eine Granate, Columbiade genannt, auf den Mond schießen zu einem Zeitpunkt, wenn der möglichst nahe der Erde steht. Die kürzeste Entfernung Erde–Mond beträgt 356.000 km. Der Flug soll 73 Std., 13 Min. und 20 Sek. dauern. Das Kanonenrohr, 900 Fuß (1 Fuß = 30,48 cm) lang, aus Gussstahl steht senkrecht in einem Schacht. Als Antrieb sollen 1.600.000 Pfund (1 Pfund = 0,454 kg) Schießbaumwolle (Nitrocellulose) verwendet werden, die das Geschoss auf eine Mündungsgeschwindigkeit v_a von rund 12.000 Yards (1 Yard = 0,9144 m) pro Sekunde beschleunigen.

Aufgaben

Im Folgenden wollen wir die Mündungsgeschwindigkeit, die Flugzeit und die Durchschnittsgeschwindigkeit der Columbiade berechnen, um dann einzuschätzen, ob Jules Vernes Angaben realistisch sein können.

1. **Lest** den Text.
2. **Rechnet** die Mündungsgeschwindigkeit v_a der Columbiade in Meter pro Sekunde um.
3. **Berechnet** die Flugzeit t der Columbiade in Sekunden s.
4. **Berechnet** die Durchschnittsgeschwindigkeit $v_{\varnothing}$ der Columbiade.
5. **Prüft** die von uns errechneten Ergebnisse und **diskutiert**, ob die von Verne angegebenen Werte realistisch sein können anhand der folgenden Fragen.
   a) **Berechnet** die Fluchtgeschwindigkeit v_F, die nötig ist, um dem Schwerefeld der Erde zu entkommen, mithilfe der Formel:
   $$v_F^2 = 2 \cdot g \cdot r_E$$
   Hierbei ist die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ und der Radius der Erde $r_E = 6.371$ km
   b) **Vergleicht** die Fluchtgeschwindigkeit mit der Mündungsgeschwindigkeit.
   c) **Überlegt**, ob das Material der Kanone geeignet ist.

Die Gravitation der Erde und die ISS

M 3

© Marc Ward/Stocktrek Images/Getty Images

Im Arbeitsblatt **M 2** hatten wir die Gravitationskraft und die Zentrifugalkraft zwischen Erde (m_E) und einem anderen Körper (m_2) kennengelernt, die einander ausgleichen und so diesen Körper auf seiner Bahn halten. Gleiches gilt für jede Masse, die die Gravitationskraft auf die Erde zwingen will und daran von der gleich starken dagegenwirkenden Zentrifugalkraft gehindert wird, wenn die Masse hinreichend schnell bewegt wird. So werden auch alle Satelliten auf ihrer kreisförmigen oder elliptischen Umlaufbahn um die Erde durch das Wirken dieser beiden Kräfte auf ihrer Bahn gehalten:

$$F_{Sat} = m_{Sat} \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m_{Sat} \cdot m_E}{r^2}$$

m_{Sat} ist die Masse eines beliebigen Satelliten. Sie fällt durch Division auf beiden Seiten der Gleichung weg (Voraussetzung $m > 0$). Also ist die Geschwindigkeit eines Satelliten von seiner Masse m_{Sat} unabhängig. So vereinfacht sich die Gleichung folgendermaßen:

$$a_{Sat} = \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m_E}{r^2}$$

Für alle astronautischen Berechnungen wird die Entfernung von Mittelpunkt zu Mittelpunkt der Körper angegeben. Wir bezeichnen sie als R und unterscheiden sie so von den Radien r der einzelnen Körper und der Flughöhe der Satelliten h.

Bei der Planung der International Space Station (ISS) wurde deren Höhe von 400 km über der Erdoberfläche gewählt. Das hat mehrere Vorteile:

- Die wichtigsten Bauelemente der ISS konnten mit dem damals verfügbaren wiederverwendbaren Raumschiff, dem Space-Shuttle, in den Orbit befördert werden.
- Der Abstand zur Erdoberfläche ist hinreichend gering, um auch kleinere Objekte auf der Erdoberfläche beobachten und dokumentieren zu können.

Aber die relativ geringe Flughöhe hat einen entscheidenden Nachteil: Es gibt in der Höhe von 400 km noch zu viele Gasmoleküle, die die ISS abbremsen und auf niedrigere Bahnen zwingen. Deshalb muss die ISS regelmäßig beschleunigt werden.

M 4 Kommerzielle Satelliten in der Erdumlaufbahn

© BlackJack3D/E+/Getty Images

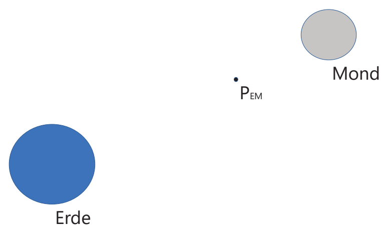
Kommerzielle Satelliten fliegen in der Regel zwischen rund 400 km und rund 40.000 km über der Erdoberfläche. Die relativ niedrig fliegende ISS haben wir bereits kennengelernt und damit die Schwierigkeit mit den noch in deren Höhe befindlichen restlichen Molekülen der Luftschicht.
Übrigens: Verne verleitete seinen Helden Barbicane zu der Aussage, dass bereits der Raum über 20 Kilometer Höhe völlig materiefrei sei. Nur deshalb, so dessen Meinung, könnte sein Projektil den Luftwiderstand in der Atmosphäre überwinden.

Um Satelliten auf Dauer stationär zu halten, müssen sie aber weit höher stationiert werden. Wir haben deshalb Umlaufbahnen gewählt, auf denen die Satelliten die Erde einmal in zwölf, vier, acht oder 24 Stunden umrunden.

In diesem Raum kreisen die meisten der kommerziellen Satelliten gegen den Uhrzeigersinn genau wie die linksdrehende Erde. Das Satellitenzeitalter, heute alltäglich, begann erst vor weniger als 65 Jahren, nämlich am 4. Oktober 1957, mit dem Start des Sputnik (Masse: 84 kg). Die meisten Satelliten haben heute Massen zwischen 1.000 kg und mehr als 2.000 kg. Ihre elliptischen Bahnen liegen in der Regel in einem Winkel zwischen 50° bis 60° geneigt gegen den Äquator. Aber hier gibt es Ausnahmen, wie wir unten zeigen werden. Die Satelliten starten möglichst nahe am Äquator in östlicher Richtung und nutzen damit die, wenn auch geringe, Fliehkraft der sich links gegen den Uhrzeigersinn drehenden Erde. So nutzt man die Geschwindigkeit am Äquator von 463 m / s als Starthilfe.

M 5 Der Äquigravitationspunkt zwischen Erde und Mond

Hermann Julius Oberth (1894–1989) hat bereits in den 20er-Jahren in seinen Büchern „Die Rakete zu den Planetenräumen (1923)" und „Wege zur Raumschifffahrt (1929)" Berechnungen zur Raumfahrt veröffentlicht, die auch heute noch als Grundlage für Satellitenflüge dienen: Erdnahe Satelliten erreichen ihre Positionen im All, indem sie sich auf immer größer werdenden Ellipsen bewegen, von denen die Erde in einem Brennpunkt liegt. Bei Mondfähren befindet sich die Raumfähre zunächst auf solchen Ellipsenbahnen bis zu dem Punkt P_{EM}, an dem die auf das Raumschiff wirkende Gravitationskraft der Erde F_E und die des Mondes F_M einander gleich sind. Da offensichtlich die beiden Kräfte senkrecht gegeneinander wirken, könnte es doch sein, dass sich – zumindest rechnerisch – die beiden Geschwindigkeiten v_E und v_M aufheben, mit der sich das Raumschiff bewegt. Wir setzen für die folgenden Berechnungen voraus, dass der Erdmittelpunkt, der Punkt P_{EM} und der Mondmittelpunkt auf einer Geraden liegen.



Skizze: Benjamin Streit

Dazu sollen die Entfernungen s_E (Erdmittelpunkt–Äquigravitationspunkt) und s_M (Entfernung Mondmittelpunkt–Äquigravitationspunkt), die Beschleunigungen a_E und a_M an diesem Punkt sowie die Geschwindigkeiten v_E und v_M berechnet werden.

Hierzu benötigen wir folgende Konstanten: Entfernung der Mittelpunkte von Erde und Mond $R_{EM} = 3{,}844 \cdot 10^8\,\text{m}$, Masse der Erde $m_E = 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$, Masse des Mondes: $m_M = 7{,}375 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$,

Gravitationskonstante: $G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Die Apollo-Raumschiffe starten nahe des Äquators gegen den Uhrzeigersinn in östlicher Richtung. So nutzt man die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Äquator als zusätzliche Starthilfe. Die Apollo-Raumschiffe behalten auch am Punkt P_{EM} ihre Fahrtrichtung weiter. Sie fallen also jetzt in eine im Uhrzeigersinn verlaufende elliptische Bahn um den Mond und würden nach dem Umfliegen des Mondes wieder am Punkt P_{EM} ankommen, wenn sie nicht vorher auf der Rückseite des Mondes mit ihrem Raketenmotor abgebremst würden.

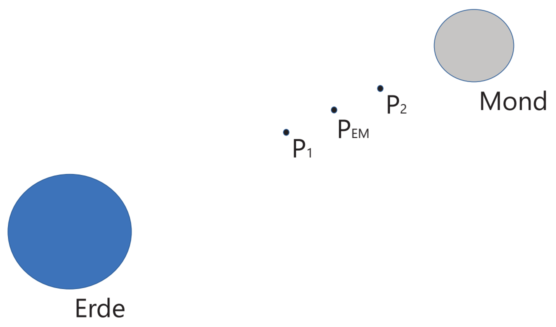
Diesen Rückfall in die Umlaufbahn um die Erde hat die Apollo 13 genutzt. Sie hatte wegen eines Defekts in der Tankanlage eine geplante Landung der Mondfähre nicht durchführen können. So war es möglich, dass die havarierte Raumkapsel wieder zur Erde zurückfliegen und sicher landen konnte.

Aufgaben

1. **Lest** den Text.
2. **Berechnet** die Entfernungen s_E und s_M am Punkt P_{EM} mithilfe der Formeln
$$a_E = G \cdot \frac{m_E}{s_E^2}, a_M = G \cdot \frac{m_M}{s_M^2} \text{ und } a_m = a_E \text{ am Punkt } P_{EM}.$$
Benutzt auch alle im Text angegebenen Konstanten!
3. **Berechnet** die Beschleunigungen a_E und a_M an diesem Punkt.
4. **Berechnet die** beiden Geschwindigkeiten v_E und v_M am Punkt P_{EM} einmal mithilfe des Gravitationsgesetzes $v^2 = G \cdot \dfrac{m}{s}$ und einmal mithilfe der in **M 3** erarbeiteten Formel $a = \dfrac{v^2}{s}$.

Beschleunigungen und Geschwindigkeiten vor und nach Punkt P_{EM}

M 6



Exemplarisch werden wir nun berechnen, welchen Kräften die Columbia kurz vor dem Wechsel aus der Erdgravitation in die Gravitation des Mondes am Punkt P_{EM} und kurz danach ausgesetzt wird.

Skizze: Benjamin Streit

Die von der Erde bedingte Gravitationskraft wird zunehmend von der Gravitationskraft des Mondes abgelöst: Das Raumschiff fällt also aus der ehemaligen elliptischen Bahn um die Erde in die neue elliptische Bahn um den Mond. Auf dessen Rückseite trennen sich das Mutterschiff Columbia und das kombinierte Landefahrzeug. Die Columbia wird abgebremst, sodass sie auf einer etwa 100 km hohen Bahn um den Mond fliegt, während das Landefahrzeug Eagle, ebenfalls abgebremst, sich langsam der Mondoberfläche nähert, um dort zu landen. Das geschah am 21. Juli 1969.

Aufgaben

1. **Lest** den Text.
2. Gruppe 1: **Bestimmt** die gesuchten Größen zu dem Zeitpunkt, wenn sich das Raumschiff vor dem Durchfliegen des Punktes P_{EM} auf dem Punkt 1 (E1 und M1) befand, also der Erde noch 1.000 km näher und vom Mond noch um 1.000 km weiter entfernt war. **Berechnet** a_{E1}, v_{E1}, a_{M1} und v_{M1}, bevor das Raumschiff P_{EM} erreicht hat.
3. Gruppe 2: **Bestimmt** die gesuchten Größen zu dem Zeitpunkt, wenn sich das Raumschiff nach dem Durchfliegen des Punktes P_{EM} auf dem Punkt 2 (E2 und M2) befand, also von der Erde um 1.000 km weiter entfernt und dem Mond 1.000 km näher war. **Berechnet** a_{E2}, v_{E2}, a_{M2} und v_{M2}.
4. **Vergleicht** die in beiden Gruppen berechneten Gravitationsgrößen und Geschwindigkeiten mit den Werten am Punkt P_{EM} (siehe **M 5**).

Dazu setzen wir die folgenden Entfernungen voraus:

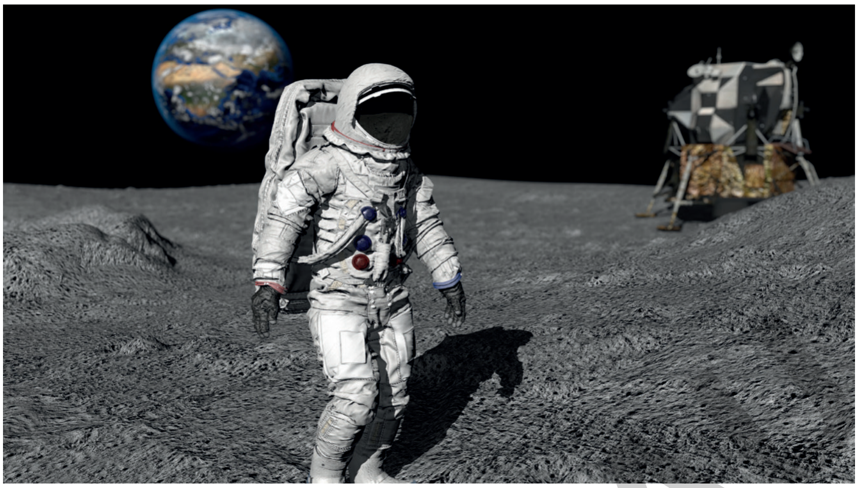
$$s_{E1} = 346.000\text{ km} - 1.000\text{ km} = 345.000\text{ km} = 3{,}45 \cdot 10^{8}\text{ m}$$
$$s_{M1} = 38.440\text{ km} + 1.000\text{ km} = 39.440\text{ km} = 3.944 \cdot 10^{7}\text{ m}$$
$$s_{E2} = 346.000\text{ km} + 1.000\text{ km} = 347.000\text{ km} = 3.47 \cdot 10^{8}\text{ m}$$
$$s_{M2} = 38.440\text{ km} - 1.000\text{ km} = 37.440\text{ km} = 3{,}744 \cdot 10^{7}\text{ m}$$

Benötigte Konstanten: $m_E = 5{,}974 \cdot 10^{24}\text{ kg};\ m_M = 7{,}375 \cdot 10^{22}\text{ kg};\ G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$

M 7 Gravitation auf dem Mond

Das Raumschiff Apollo und der Mond

In Zeitungsberichten über den Mondaufenthalt der Astronauten hieß es, dass die Schwerkraft auf dem Mond g_m nur ein Siebentel der Erdgravitation betrage. Prüfe, ob diese Angabe richtig ist.



© Merlinus74/iStock/Getty Images Plus

Das Apollo-11-Raumschiff und die Landung der Mondlandefähre LM mit dem Eagle an Bord

Das Apollo-11-Raumschiff Columbia war das erste Fahrzeug, mit dem die Landung auf dem Mond bewerkstelligt wurde. Die Jupiter-5-Rakete startete am 16. Juli 1969. Sie ging, von den unteren beiden Stufen beschleunigt, zunächst in eine Umlaufbahn um die Erde. Ihre dritte Stufe zündete und beschleunigte die Columbia erneut, dass sie in eine elliptische Bahn schwenkte, auf der sie innerhalb von drei Tagen in die Nähe zum Mond flog. Am Punkt P_{EM} schwenkte die Columbia in die Umlaufbahn um den Mond ein. Dort trennten sich die Mondlandefähre LM (Lunar Modul) mit der Eagle an Bord von dem Mutterschiff der Columbia, das mit M. Collin, dem dritten Astronauten, den Mond auf einer Wartebahn umkreiste. Die beiden Astronauten N. A. Armstrong und E. E. Aldrin landeten mit dem Lunar-Modul auf dem Mond. Sie blieben aber nur etwa zwei Stunden dort, ehe sie mit der Eagle von dem Lunar-Modul starteten, das auf dem Mond stehen blieb. Trotz ihrer großen Ausrüstung konnten sich die beiden Astronauten recht gut auf dem Mond bewegen. Oft hüpften sie, statt vorsichtig zu laufen.

Aufgaben

1. **Lest** den Text.
2. **Berechnet** die Gravitation auf dem Mond mit dem Gravitationsgesetz von Newton.
3. **Berechnet** die Gravitation a_{M100}, die der Mond auf die Columbia ausübt, die Geschwindigkeit v_M der Columbia und ihre Umlaufzeit t_M während der Wartezeit. Sie flog nach damaligen Berichten in einer Höhe von hundert Kilometern über der Mondoberfläche.
   Verwendet dabei folgende Daten: Masse des Mondes $m_M = 7{,}375 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$, mittlerer Radius des Mondes $r_M = 1{,}738 \cdot 10^{6}\,\text{m}$, Mondumlaufzeit (= 1 Umdrehung) $m_U = 655{,}72\,\text{Std}$ Gravitationskonstante $G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

Zusammenstellung der Daten der einzelnen Satellitenbahnen

M 8

Wir haben in den vorherigen Unterrichtseinheiten verschiedene Daten zu Satelliten-, Raumstations-, Raketen- und anderen Umlaufbahnen berechnet. Zum Abschluss dieser Reihe wollen wir die berechneten Daten zusammentragen.

Aufgaben

1. Stellt eine Tabelle zusammen, in der die Höhen (über dem Erdmittelpunkt und der Erdoberfläche), die Länge der Umlaufbahnen (Umfang), die Umlaufzeit, die Umlaufgeschwindigkeiten der ISS, der Raketen und der Satelliten sowie die Gravitation durch Erde bzw. durch Mond aufgelistet werden.

Punkt/Objekt	R und h in m	Umfang in m	t in s	v in $\frac{m}{s}$	g / a in $\frac{m}{s^2}$

2. Gibt es irgendwelche auffälligen Zusammenhänge?