Algebraische Funktionen

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Wie sieht eigentlich die Gleichung einer Ellipse oder einer „liegenden" Parabel aus? In diesem Beitrag erfahren die Jugendlichen, dass Zuordnungen und Funktionen auch über algebraische Gleichungen definiert werden können. Das ermöglicht viele neue Möglichkeiten und Herangehensweisen auch in der Differenzialrechnung.
Fordern Sie Ihre Lerngruppe mit den vielfältigen Aufgaben von weiterführendem Niveau heraus und fördern sie so gezielt leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.

Algebraische Funktionen

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Alfred Müller

Die Schüler lernen:

Potenz- und Wurzelfunktionen zu diskutieren. Sie erfahren, dass Zuordnungen und Funktionen auch durch algebraische Gleichungen definiert werden können, lernen das implizite Differenzieren kennen und spalten nach Möglichkeit die Gleichungen in Funktionen auf.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Potenzfunktion mit reellen Exponenten	M1	Ab
Durch algebraische Gleichungen definierte Funktionen	M2	Ab
Implizite Differentiation	M3	Ab
Durch quadratische Gleichungen definierte Funktionen	M4	Ab
Beispiele zu Funktionen mit beliebigen algebraischen Gleichungen	M5	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Potenz- und Wurzelfunktionen, implizite Differentiation, durch algebraische Gleichungen definierte Funktionen, Ellipsen und Hyperbeln

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lehrplanbezug

Der Beitrag fördert insbesondere Kompetenzen im Bereich „Differenzial- und Integralrechnung" z. B. aus dem bayerischen Lehrplan der Oberstufe:

Die Schülerinnen und Schüler …

– analysieren Funktionen, auch mit Parametern, hinsichtlich ihrer Eigenschaften durch flexible und reflektierte Nutzung der Methoden der Differenzial- und Integralrechnung,
– leiten Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten sowie Verknüpfungen und Verkettungen dieser Potenzfunktionen mit Funktionen bisher bekannter Funktionstypen ab; hierfür nutzen sie flexibel die Produkt-, die Quotienten- und die Kettenregel.
– untersuchen einfache Verknüpfungen und Verkettungen der Wurzelfunktion mit Funktionen bisher bekannter Funktionstypen auch mit den Methoden der Differenzialrechnung.

▶ https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/11/mathematik
▶ https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/12/mathematik
(aufgerufen am 04.06.2021)

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden sollten bereits geübt sein im Umgang mit der Summen-, Produkt-, Ketten- und Quotientenregel der Differenzialrechnung. Kurvendiskussionen mit ganzrationalen Funktionen sollten den Jugendlichen keine größeren Probleme bereiten.

Einsatzmöglichkeiten

Material **M 1** ist von grundlegendem Niveau und ist daher auch für das Selbststudium geeignet. Bei den darauffolgenden Materialien sollten Sie aufgrund des höheren Niveaus jeweils eine ausführliche Beispielaufgabe im Unterricht besprechen.

Differenzierungsmöglichkeiten

Auf jedem Material finden Sie Beispielaufgaben mit deren ausführlichen Lösungen. Wenn sich die Jugendlichen die Inhalte der Materialien selbst erarbeiten, erreichen Sie eine Differenzierung nach Leistungsstärke, indem leistungsstärkere Klassenmitglieder auch bereits die Beispielaufgaben selbst bearbeiten.

Beispiele (M 1)

1. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion:
   $f(x)=\sqrt{x^2-1}=\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}},\ \mathbb{D}_f=\{x\,|\,x\geq 1 \vee x\leq -1\}$.

2. Berechnen Sie das folgende Integral:
   $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{\sqrt{6x-9}}{x}$.

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ sowie die Grenzwerte bei Annäherung an die Grenzen von D. Gibt es Asymptoten?
   b) Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Extremwerte und geben Sie die Wertemenge W_f an.
   c) Bestimmen Sie die Abszisse des Wendepunkts.
   d) Bestimmen Sie das Verhalten von $f'(x)$ am linken Rand von $\mathbb{D}$ und zeichnen Sie den Graphen G_f für alle x mit $x\leq 6$.

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2-x}{x-1}$.

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$, die Gleichungen der Asymptoten und untersuchen Sie, ob der Graph G_f Extremwerte und Wendpunkte besitzt. Geben Sie die Wertemenge W_f an.
   b) Vom Punkt $P(-2|0)$ werden Tangenten an den Graphen G_f gelegt. Bestimmen Sie die Berührpunkte und die Gleichungen der Tangenten und skizzieren Sie den Graphen G_f sowie die Tangenten.
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph und die zugehörige Tangente zwischen $x=-2$ und $x=0$ miteinander einschließen.
   d) Jetzt ist die Funktion g mit $g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ gegeben.

      Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$, untersuchen Sie den Graphen G_g auf Extremwerte, bestimmen Sie die Gleichung(en) der Asymptote(n) und die Wertemenge W_g der Funktion g.
   e) Skizzieren Sie den Graphen G_g .

5. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

   a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Extremwerte sowie auf Asymptoten. Welche Wertemenge W_f ergibt sich?

   b) Wenn man die Gleichung quadriert, erhält man eine Gleichung der Form $y^2 \cdot (1+x) - x^2 \cdot (1-x) = 0$. Zeichnen Sie zuerst den Graphen G_f und ergänzen Sie diesen durch den Graphen G_F.

Lösungen zu den Beispielen (M 1)

1. $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

   oder den Wurzelausdruck mit der Kettenregel abgeleitet:

   $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

2. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \frac{x^{\frac{9}{6}}}{x^{\frac{2}{6}}}dx = \int x^{\frac{7}{6}}dx = \frac{x^{\frac{7}{6}+1}}{\frac{7}{6}+1} + c = \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + c = \frac{6 \cdot \sqrt[6]{x^{13}}}{13} + c$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{6x-9}}{x}$

   a) Es muss gelten: $6x - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \wedge x \neq 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \left[\frac{3}{2}; \infty\right[$.

   Grenzwerte:

   $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}+0} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ waagrechte Asymptote $y = 0$.

   b) Extremwerte:

   $$f'(x) = \frac{\frac{6}{2\sqrt{6x-9}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{6x-9}}{x^2} = \frac{3x-6x+9}{x^2\sqrt{6x-9}} = \frac{9-3x}{x^2\sqrt{6x-9}} = \frac{3(3-x)}{x^2\sqrt{6x-9}}$$

   $f'(x) > 0$ für $x < 3 \;\Rightarrow$ streng monoton zunehmend

   $f'(x) < 0$ für $x > 3 \;\Rightarrow$ streng monoton abnehmend

   $\Rightarrow$ bei $x = 3$ liegt ein Hochpunkt mit $f(3) = 1 \Rightarrow H(3|1)$