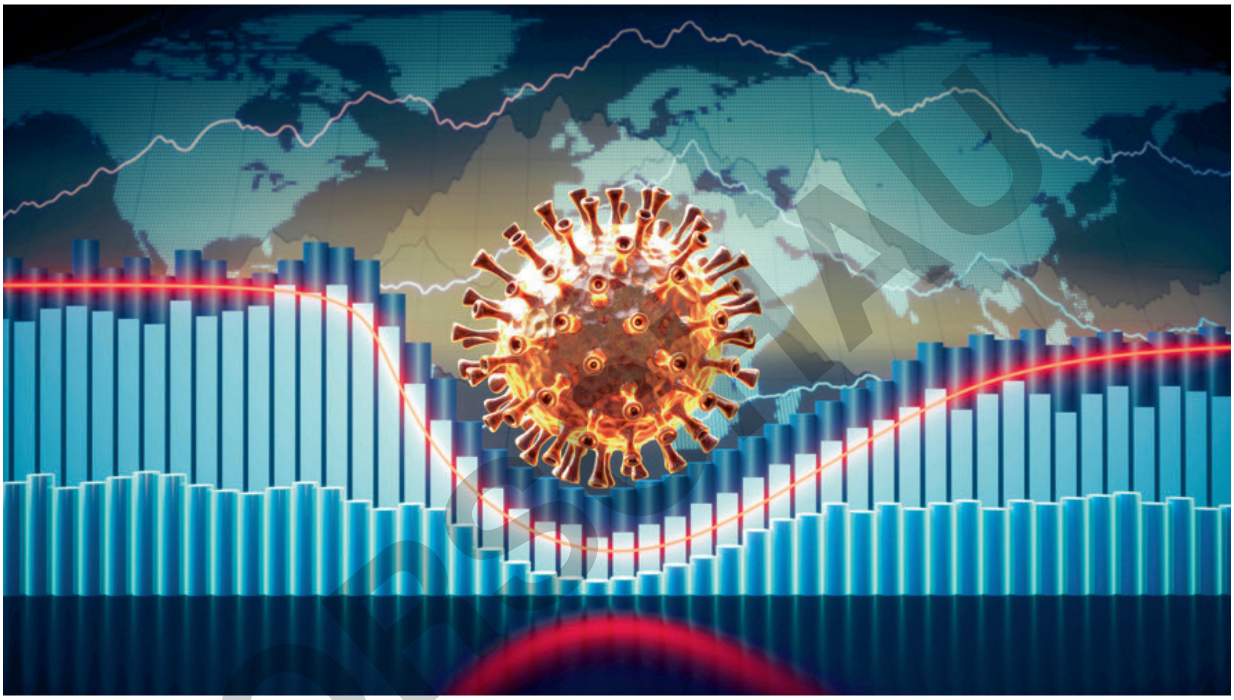
Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst



© matejmo/E+/Getty Images Plus

Wie viele Menschen infizieren sich wöchentlich durchschnittlich mit dem Corona-Virus? Dies ist nicht nur für die Johns-Hopkins-Universität interessant, sondern stellt eine aktuelle Anwendung des Mittelwerts von Funktionen dar.
Vom Begriff des arithmetischen Mittels ausgehend erarbeiten sich die Lernenden in diesem Beitrag den Mittelwert von Funktionswerten. Dies führt sie schließlich zum Mittelwertsatz der Integralrechnung, dessen Beweis sie ebenfalls kennenlernen. Als Ausblick verweist der Beitrag auf den verwandten Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Die vorgestellten Begriffe vertiefen Ihre Schülerinnen und Schüler an einigen Aufgaben und zur Lernzielkontrolle finden Sie am Ende des Beitrags eine Klassenarbeit.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: matejmo/E+/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Oberstufe (weiterführend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst

Die Schüler lernen:

den Mittelwert von Funktionen, den Mittelwertsatz der Integral- und Differenzialrechnung an konkreten Beispielen kennen und festigen ihr neues Wissen mithilfe von realitätsnahen Aufgaben. Besonders interessierte Lernende erarbeiten sich den Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Mittelwert auf Intervall – Theorie	M1	Ab
Aufgaben	M2	Ab
Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!	M3	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: arithmetisches Mittel, Mittelwert von Funktionswerten, Mittelwertsatz der Integralrechnung, Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Medien: Taschenrechner, CAS-Rechner

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Den Mittelwert einer Funktion auf einem Intervall berechnen

Hinweise zum Mittelwert einer Funktion

Den Mittelwert einer Funktion (genauer der Funktionswerte) auf einem Intervall zu berechnen, basiert auf dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, der in diesem Beitrag vorgestellt wird. Der Beweis dieses Mittelwertsatzes ist wohl nur für sehr gute Schülerinnen und Schüler[1] bzw. interessierte Kolleginnen und Kollegen gedacht, welche die Hintergründe genauer interessieren.
Im Lehrplan ist dieses Thema nach der Besprechung des Integralbegriffs angesiedelt und wird deshalb sicherlich eines der letzten Themen im Rahmen der Analysis vor dem Abitur sein.
Bei den unterstützenden Aufgaben sollten Sie darauf achten, dass Ihre Schüler möglichst viele verschiedene Funktionstypen behandeln und dass auch die Anwendungsaufgaben nicht zu kurz kommen.
Sämtliche Aufgaben sind so gestaltet, dass Ihre Schüler sie sowohl durch Zuhilfenahme eines Taschenrechners als auch unter Verwendung eines CAS-Rechners, was in vielen Fällen wesentlich weniger Rechenarbeit erfordert, lösen können.
Das Material **M 3** ist ein Klausurbeispiel zu diesem Thema, das den Lernenden helfen soll, sich auf eine Prüfung zu diesem Thema vorzubereiten. Außerdem können Sie das Klausurbeispiel zur Lernzielkontrolle verwenden.

1 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

M 1 Mittelwert auf Intervall – Theorie

Unter dem arithmetischen Mittel M (oder auch arithmetischem Mittelwert m) von n Zahlen $a_1,\ldots,a_n$ versteht man:

$$M=\frac{1}{n}\cdot\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Dies lässt sich auf Funktionswerte übertragen:

Wenn f eine auf einem Intervall [a; b] stetige Funktion ist, geht man folgendermaßen vor:

– Das Intervall [a; b] wird in n Teilintervalle der Länge $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ unterteilt.

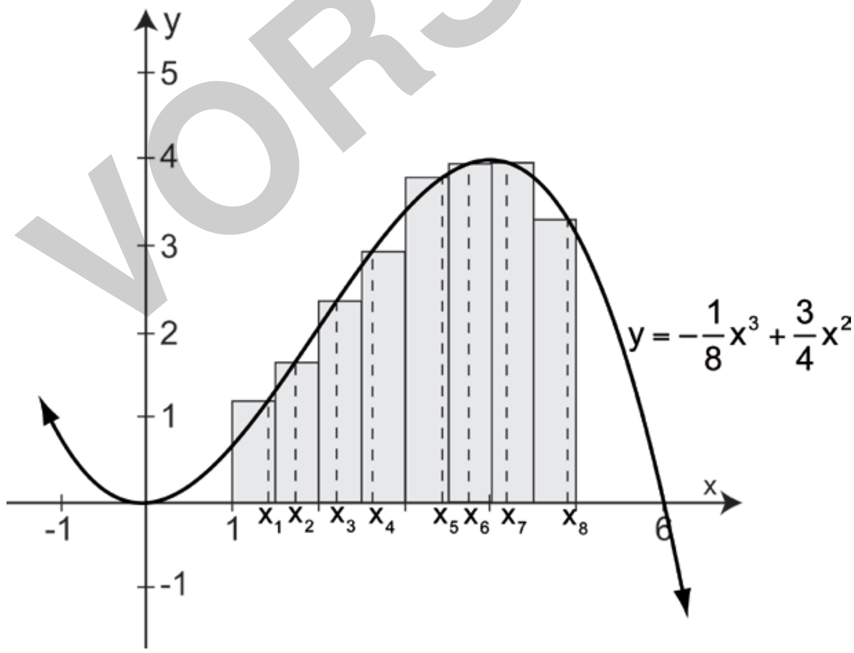
– In jedem Teilintervall nimmt man (beliebig) einen Funktionswert $f(x_i)$

– Man bildet das arithmetische Mittel dieser Funktionswerte: $M=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$

– Man formt den Term von M algebraisch um mit $n=\frac{b-a}{\Delta x}$:

$$M=\frac{\Delta x}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{1}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)\cdot\Delta x\right)$$

Dieses Vorgehen lässt sich in der folgenden Abbildung erkennen. Es wird beispielhaft die Funktion f, gegeben durch $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2$, im Intervall [1; 5] für $n=8$ betrachtet:



© *Carlo Vöst*

Es gilt dann: $M = \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{0{,}5}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^{8} f(x_i) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{8} \left(f(x_i) \cdot 0{,}5 \right)$

– Man bildet nun den „Grenzwert" (d. h., man vergrößert den Wert von n immer mehr):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \Delta x \right) \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot \Delta x \right) \right) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

(Dies ist natürlich kein Grenzwert im Sinne der Analysis.)

Definition

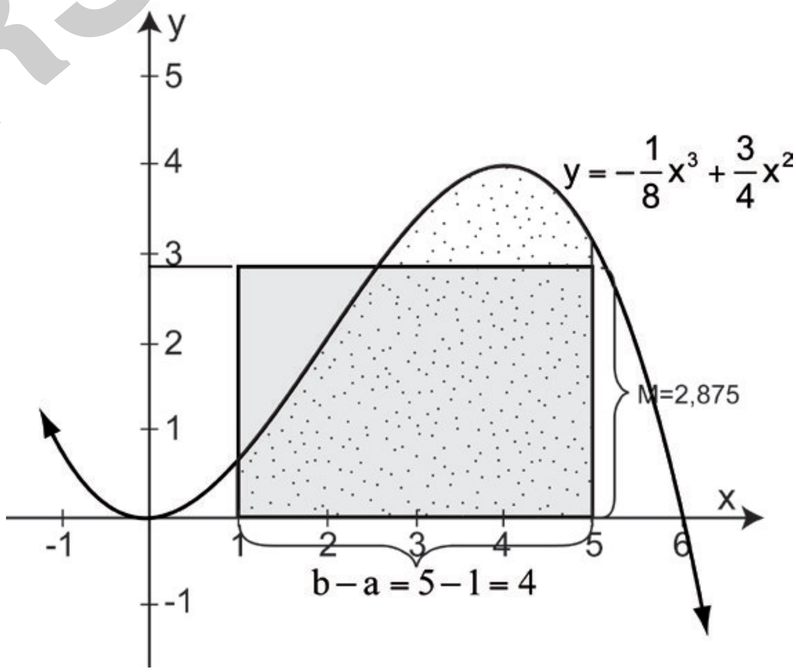
Sei f eine stetige Funktion. Der Mittelwert M von der Funktion f auf dem Intervall [a; b] berechnet sich als $M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$.

Fortsetzung des oben angegebenen Beispiels:

$$M = \frac{1}{5-1} \cdot \int_1^5 \left(-\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx = \frac{1}{4} \cdot \left[-\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 \right]_1^5 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{625}{32} + \frac{125}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \right) = \frac{23}{8} = 2{,}875$$

Die geometrische Bedeutung des Mittelwerts M lässt sich jetzt sehr gut an nebenstehender Graphik erkennen (die graue und die gepunktete Fläche haben den gleichen Inhalt): Die Abbildung zeigt außerdem, dass der Mittelwert M der Funktionswerte offenbar selbst auch ein Funktionswert von f ist (etwa bei $x = 2{,}6$ und bei $x = 5{,}1$). Dies lässt sich auch allgemein beweisen.



© Carlo Vöst

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige Funktion, dann gibt es ein $c \in]a;b[$, sodass gilt:

$(b-a)\cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx$. (wird oft auch so dargestellt: $f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$)

Beweis:

Wegen der Stetigkeit von f in $I = [a;b]$ gibt es nach dem Satz vom Minimum und Maximum Zahlen $m, M \in I$ mit $f(m) \le f(x) \le f(M)$.

1. Fall: $f(m) = f(M)$: dann gilt: $f(x) = f(m)$, d. h. $f(x)$ ist konstant in I.

Wählen Sie ein $c \in]a;b[$, dann gilt: $\int_a^b \underbrace{f(x)}_{=f(m)}dx = \underbrace{f(m)}_{=f(c)}\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a)$;

2. Fall: $f(m) < f(M)$: $f(x) \ge f(m)$ für alle $x \in I$ und es gibt ein $c \in [a;b]$ mit $f(x) > f(c)$, (z. B. M) deshalb gilt dann:

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b f(m)dx = f(m)\cdot(b-a) \Leftrightarrow f(m) < \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b f(M)dx = f(M)\cdot(b-a) \Leftrightarrow f(M) > \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $c \in [a;b]$, das zwischen m und M liegt, also $c \ne a \wedge c \ne b$ mit der Eigenschaft: $f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$.

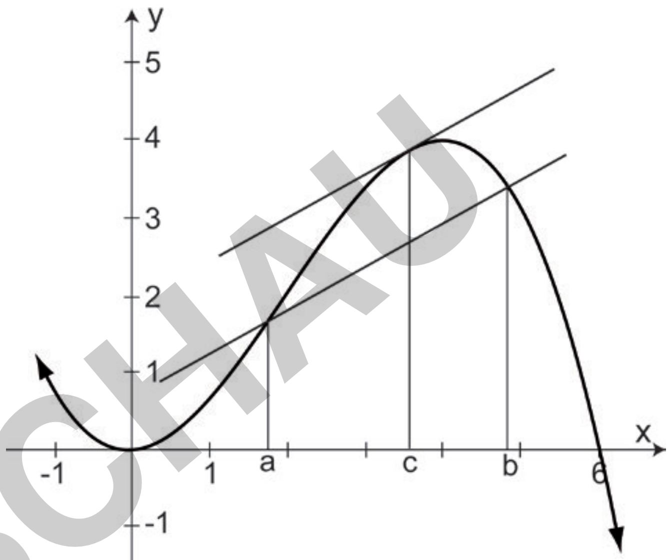
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist f eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und im offenen Intervall $]a; b[$ differenzierbare Funktion, dann gibt es mindestens eine Stelle c mit $a < b < c$, sodass gilt:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Veranschaulichung:

Geometrische Deutung: Es gibt in dem Intervall in mindestens einem Punkt eine „mittlere Steigung" des Graphen von f, welche durch die Sekantensteigung $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ beschrieben wird.



© Carlo Vöst

Schreibt man

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

als

$$F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) \Leftrightarrow F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

so folgt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für die Stammfunktion F.

M 2 Aufgaben

Schwierigkeitsstufe:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

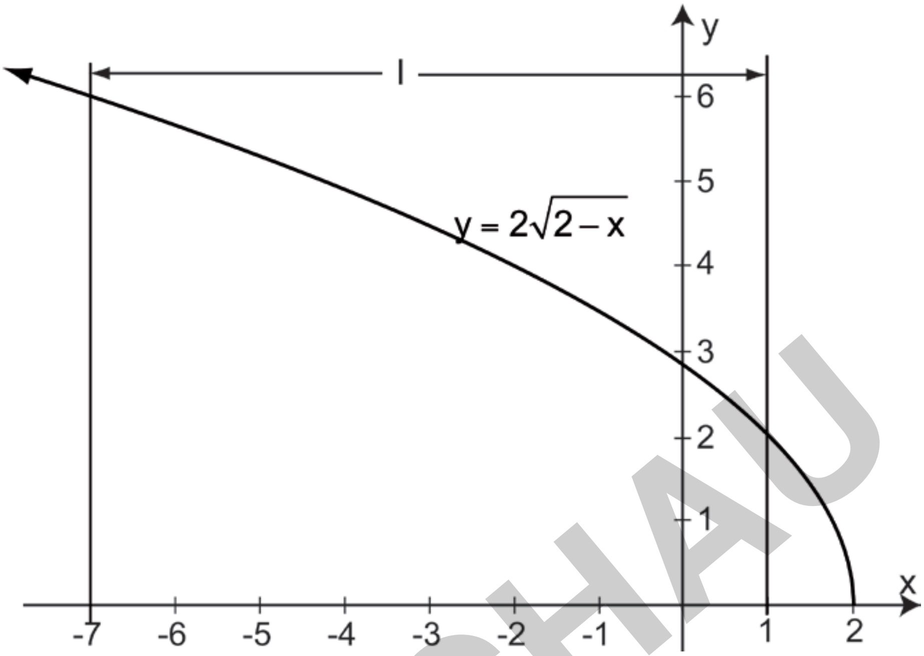
1. Gegeben ist die quadratische Funktion f durch $f: x \mapsto -x^2 + 9x - 8;\ D_f = \mathbb{R}$.
   a) Berechnen Sie Scheitel und Nullstellen der zugehörigen Parabel und zeichnen Sie den Graphen von f in ein Koordinatensystem.
   b) Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[1{,}5\,;6]$.
   c) Berechnen Sie die Stelle x_1, für die gilt: $f(x_1) = M$.
   d) Stellen Sie die grafische Bedeutung des in Teilaufgabe b) berechneten Mittelwerts durch Markieren entsprechender inhaltsgleicher Flächen dar.

2. Gegeben ist die Funktion f durch: $f: x \mapsto \frac{4x^2 - 3}{x^2};\ D_f = \mathbb{R}^+$.
   a) Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[1\,;4]$.
   b) Berechnen Sie die Stelle x_1, für die gilt: $f(x_1) = M$.
   c) Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $]0; 8]$.

x	0,6	1	2	3	4	8
f(x)						

   d) Stellen Sie die grafische Bedeutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung durch Markieren entsprechender inhaltsgleicher Flächen dar.
   e) Berechnen Sie diejenige Stelle x_2 im Intervall $[1\,;4]$, an der die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung für dieses Intervall ist. Stellen Sie diesen Sachverhalt auch in der Zeichnung von Teilaufgabe c) grafisch dar.

3. Gegeben ist die Funktion f durch: $f: x \mapsto 2 \cdot \sqrt{2-x}$; $D_f = \{x | x \leq 2\}$.
Der Graph von f ist untenstehend abgebildet.
Betrachtet wird im Weiteren das Intervall $I = [-7;1]$.



© *Carlo Vöst*

a) Berechnen Sie den Mittelwert M der Funktionswerte von f auf dem Intervall I.
b) Berechnen Sie auch die Stelle x_1, für die gilt: $f(x_1) = M$.
c) Berechnen Sie diejenige Stelle x_2 in I, an der die Tangentensteigung gleich der Sekantensteigung für das Intervall I ist.

4. Eine Wetterstation misst an einem Novembertag zwischen 8 Uhr und 18 Uhr die Temperatur, die an diesem Tag (näherungsweise) durch die Funktion f gegeben ist durch $f(t) = -\frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + 2$, t in Stunden seit 8 Uhr, $0 \leq t \leq 10$, f(t) in Grad Celsius.
a) Zeigen Sie, dass an diesem Tag um 8 Uhr und um 18 Uhr die gleiche Temperatur vorliegt. Welche ist das?
b) Bestimmen Sie die Tageshöchsttemperatur (auf 1 Dezimale genau) und um welche Uhrzeit sie erreicht wird.
c) Ermitteln Sie die Durchschnittstemperatur (auf 1 Dezimale genau) im Beobachtungszeitraum.
d) Begründen Sie, warum der Temperaturverlauf außerhalb des angegebenen Zeitraums durch die Funktion f nicht realistisch ist.