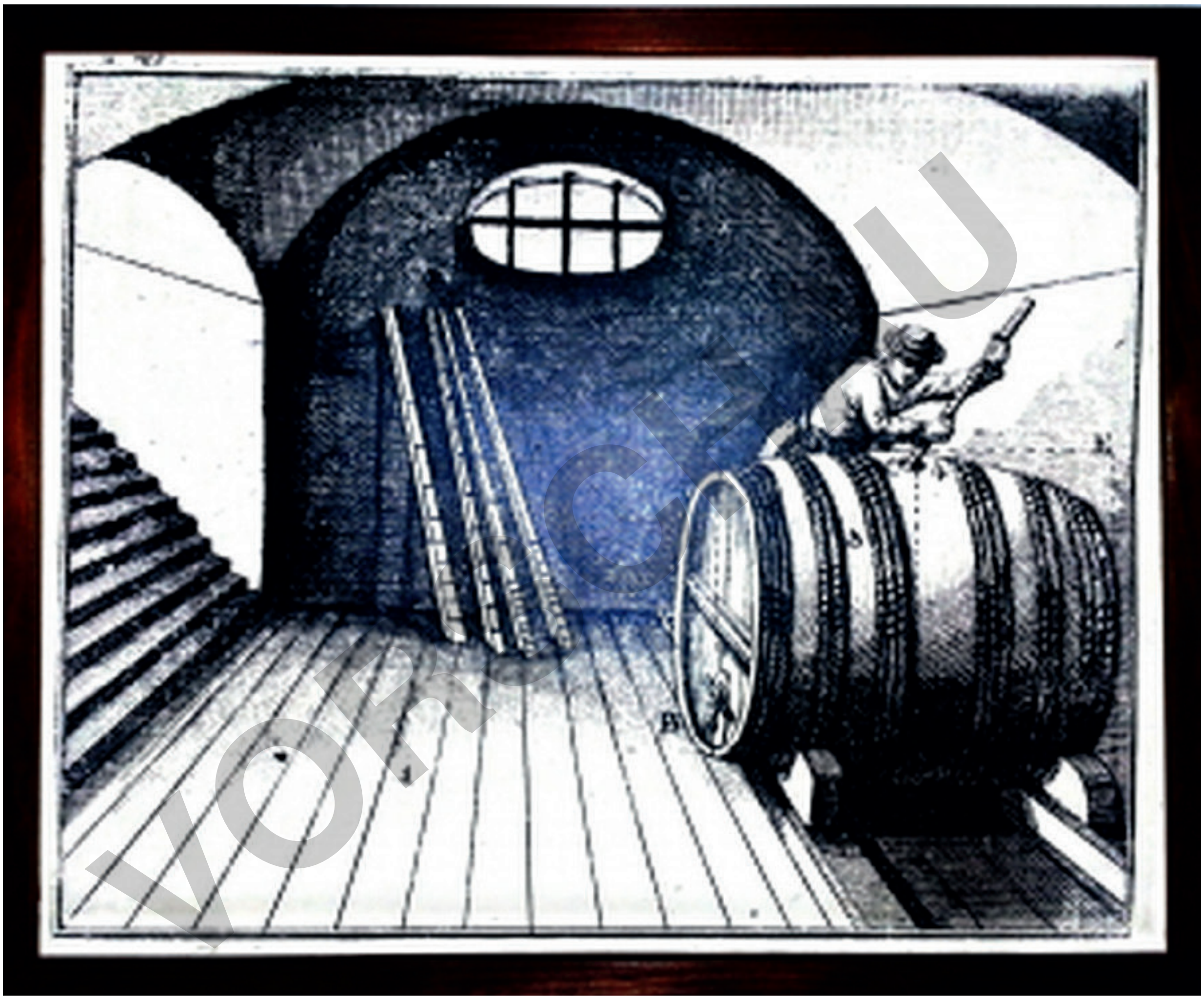
Fläche, Volumen, Kepler'sche Fassregel

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen von Peter Bunzel



Bildquelle: Gutenberg Universität Mainz, AK Mathematikgeschichte und Unterricht, *https://ak-mg-u.uni-mainz.de/*

Warum heißt eine Regel zur näherungsweisen Berechnung von Flächen „Fassregel"? Und wer hat sie zuerst verwendet? Torricelli, Simpson, Newton oder Kepler? In diesem Lesebuchbeitrag, ergänzt mit Aufgaben, gehen Ihre Schüler auf Spurensuche und beschäftigen sich mit der Herleitung und der Anwendung der Regel.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Gutenberg Universität Mainz, AK Mathematikgeschichte und Unterricht, https://ak-mg-u.uni-mainz.de/
Illustrationen: Peter Bunzel, Rottweil
Lektorat: Günter Gerstbrein, Dr. Viktor Adler Str. 3/7, A-2000 Stockerau, Österreich
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

Fläche, Volumen, Kepler’sche Fassregel

Peter Bunzel, Rottweil
Illustrationen von Peter Bunzel

Die Schüler lernen:

Integrale näherungsweise mithilfe der „Kepler’schen Fassregel“ zu berechnen. Sie überprüfen die Genauigkeit dieser Regel anhand von Beispielen. Außerdem erhalten sie Informationen aus der Geschichte der Flächen- und Volumenberechnung und beschäftigen sich mit verschiedenen Ansätzen bei der Herleitung der „Kepler’schen Fassregel“.

Überblick:

Legende der Abkürzungen: **Ab** = Arbeitsblatt **TA** = Tafelanschrieb

Thema	Material	Methode
Näherungsweise Berechnung von Integralen	M1	Ab, TA
Wozu wird eine Parabel (vom Grad 2) benötigt?	M2	Ab
Berechnet man Flächen oder Rauminhalte?	M3	Ab
Hat Kepler die Fassregel überhaupt verwendet?	M4	Ab
Hat Kepler unregelmäßige Körper berechnet?	M5	Ab
Wer war der Erste?	M6	Ab
Woher kommt der Faktor 4?	M7	Ab
Trägt die Kepler'sche Fassregel ihren Namen zu Recht?	M8	Ab
Grenzen der Kepler'schen Fassregel	M9	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Stammfunktion, Kepler'sche Fassregel, Simpsonregel, Tangente, Flächeninhalt, Volumen, Tangententrapez, Sehnentrapez, Kegelstumpf, Rotationskörper

Medien: PC mit Internetanschluss

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), Kommunizieren (K6)

Hinweise zur Kepler'schen Fassregel

Die Kepler'sche Fassregel bzw. das Verfahren von Simpson sind beispielsweise in den Bildungsplänen von Sachsen, Hessen oder Schleswig-Holstein verankert. Genauer heißt es im Bildungsplan von Sachsen (Wahlbereich 5: Numerische Integrationsverfahren):

> „Einblick gewinnen in die Geschichte der Integralrechnung
>
> Kennen von numerischen Integrationsverfahren
>
> – Kepler'sche Fassregel
> – Formel von Simpson
>
> Einblicke gewinnen … anhand ausgewählter Beispiele"

Lernvoraussetzungen:

Integralrechnung bis zum Flächeninhalt, für Aufgabe 7 bis zu Rotationskörpern.

Ablauf:

Verwenden Sie diesen Text als Lesebuchbeitrag für einzelne Schüler oder als Grundlage für Referate. Auch ein Einsatz im Unterricht ist gewinnbringend.

Die Materialien sollen in Kleingruppen bearbeitet werden. In diesem Fall ist es sinnvoll, **M 1** im Plenum zu besprechen. Danach erfolgt die Arbeit in den Gruppen. Möglich ist dabei z. B.

Gruppe	1	2	3	4
Material	M 2	M 3 bis M 5	M 6 – Aufg. 3	M 6 – Aufg. 4

Gruppe	5	6	7
Material	M 6 – Aufg. 5 u. Aufg. 6	M 6, Rest	M 7

Am Schluss stellen die Lernenden ihre Ergebnisse im Plenum vor.

M 1 Näherungsweise Berechnung von Integralen

Es gibt Funktionen, bei denen eine Stammfunktion nur schwer zu bestimmen ist. Bei manchen gibt es gar keine elementare Stammfunktion. Soll nun für eine solche Funktion eine Fläche zwischen dem Schaubild der Kurve und der x-Achse berechnet werden, kann man heutzutage einen GTR oder ein CAS verwenden, um einen sehr genauen Näherungswert für diese Fläche zu erhalten.

Kann man diese nicht verwenden, hat man die Möglichkeit, mit der **Kepler'schen Fassregel** einen Näherungswert zu berechnen, der in vielen Fällen sehr gut ist.

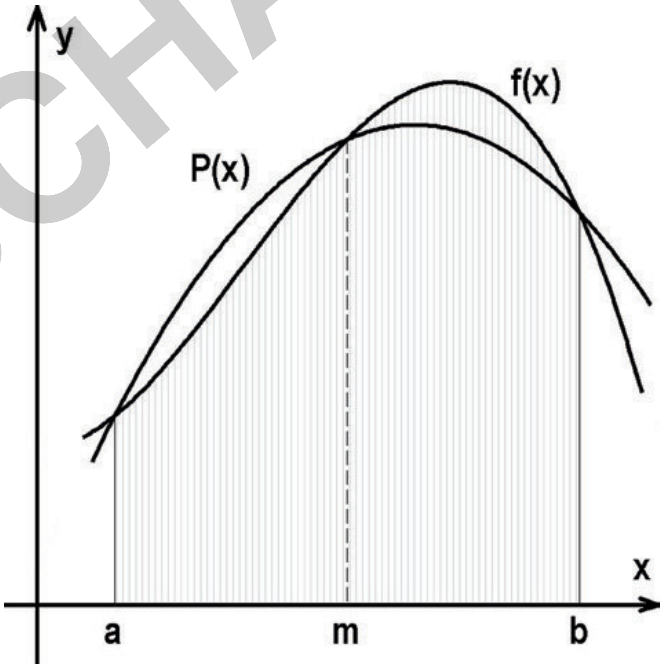
Kepler'sche Fassregel (für Flächen):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\big(f(a)+4f(m)+f(b)\big)$$

Herleitung der Formel:[1]

> „(…) eine Näherung zum Integral einer Funktion im Intervall wird berechnet, indem man die schwer zu integrierende Funktion f(x) durch eine exakt integrierbare Parabel P(x) annähert (…)" [2].

Falls nötig, kann man diesen Näherungswert verbessern, indem man die zu berechnende Fläche in eine gerade Anzahl (2N) von Teilflächen zerlegt. Man erhält dann die **Simpsonregel**.



Grafik: Peter Bunzel, vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021)

[1] Quelle: Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Simpsonregel (zuletzt aufgerufen am 1.02.2021), CC-BY-SA-3.0

[2] Gemeint ist hier: … eine …Parabel vom Grad 2
Nach dem Ansatz wird die Fassregel ohne weitere Rechnung oder Begründung direkt angegeben.