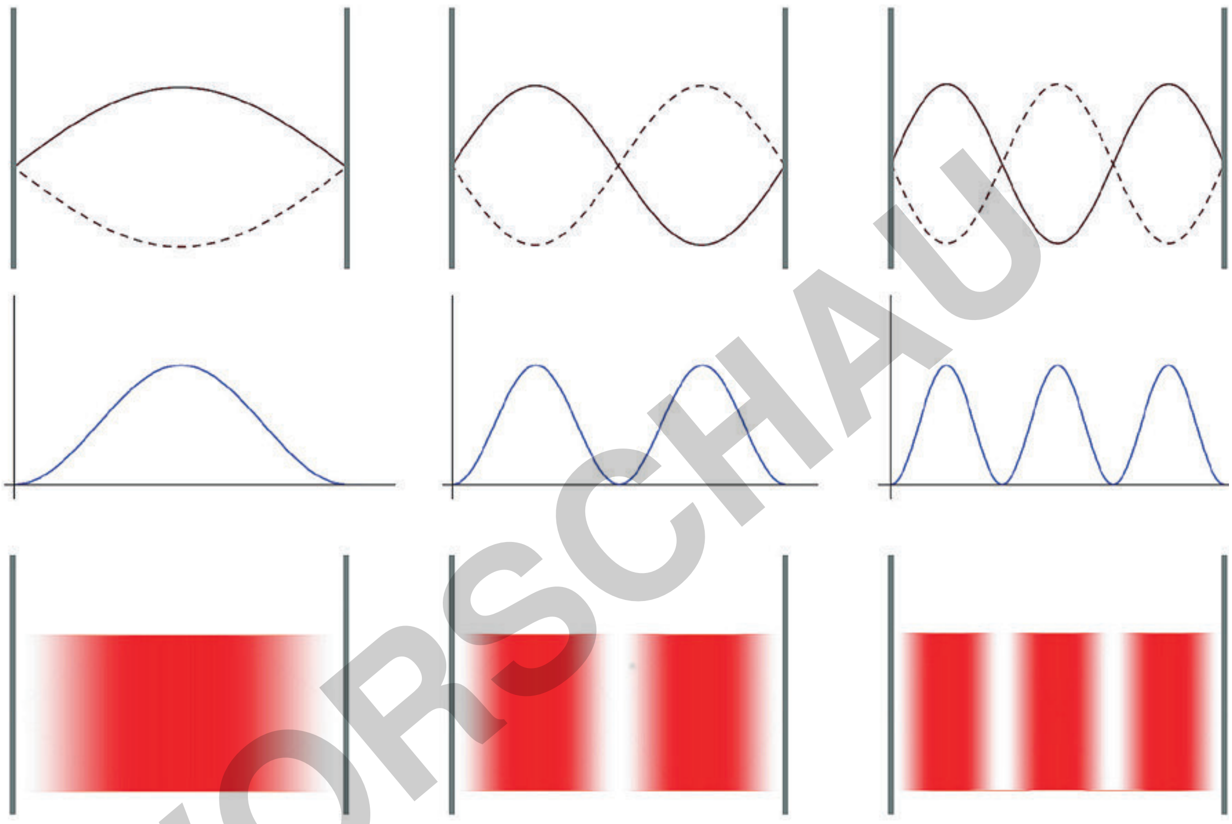
Der lineare Potenzialtopf

Matthias Borchardt, Bonn
Illustrationen von Matthias Borchardt



Grafik: Matthias Borchardt

Sobald der Aufenthaltsbereich eines Elektrons räumlich begrenzt wird, kann dieses nur noch ganz bestimmte Geschwindigkeiten annehmen – die Energie des Elektrons ist gequantelt. Mithilfe des einfachen Modells des linearen Potenzialtopfes nähern sich Ihre Schüler diesem erstaunlichen Phänomen, das weitreichende Konsequenzen für die Physik der kleinsten Teilchen hat.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Matthias Borchardt
Illustrationen: Matthias Borchardt
Lektorat: Dr. Stefan Völker, Jena
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Der lineare Potenzialtopf

Oberstufe (Niveau)

Matthias Borchardt, Bonn
Illustrationen von Matthias Borchardt

Die Schüler lernen:

das theoretische Konzept des linearen Potenzialtopfs kennen und erlangen somit die wichtige Erkenntnis, dass atomare Teilchen, deren Aufenthaltsbereich begrenzt wird, nur ganz bestimmte Energiewerte annehmen können. Diese Quantelung der Energie ist eng mit der Idee verknüpft, dem Teilchen Welleneigenschaften zuzuschreiben. Dass dieser theoretische Ansatz durchaus reale Bezüge aufweist, wird am Beispiel von Farbstoffmolekülen deutlich. Darüber hinaus lernen Ihre Schüler, dass auch die Nukleonen im Atomkern einer Energiequantelung unterliegen, da das Kernpotenzial näherungsweise mit dem eines linearen Potenzialtopfes verglichen werden darf.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **Si** = Sicherung

Thema	Material	Methode
Der Potenzialtopf – ein Gefängnis für Elektronen	M1	Ab
Die Quantelung der Energie	M2	Ab
Wechsel des Quantenzustandes	M3	Ab
Nun kommt Farbe ins Spiel	M4	Ab
Eine Hausaufgabe	M5	Ab, Si
Der Atomkern – ein Potenzialtopf?	M6	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Modell des linearen Potenzialtopfs, Quantelung der Energie, Quantenübergänge unter Aussendung von Strahlung, Farbstoffmoleküle und Atomkerne als Anwendungsbeispiel für lineare Potenzialtöpfe

Medien: Taschenrechner

Kompetenzen: Über Basiswissen verfügen (F1); Probleme lösen (F3); Wissen kontextbezogen anwenden (F4); Phänomene beschreiben (E1); Formeln anwenden (E4); Idealisierungen vornehmen (E5); Daten auswerten (E9)

Hinweise

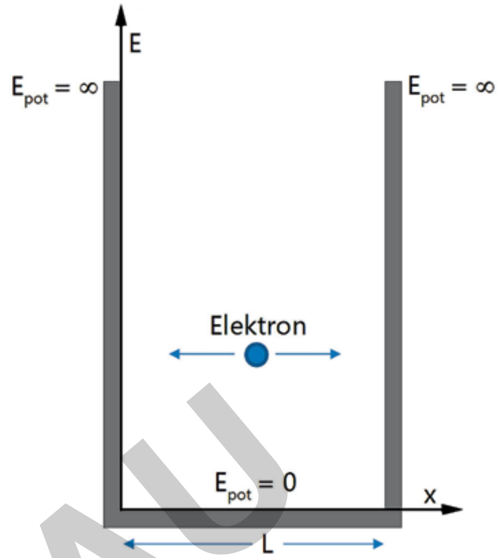
Ein Elektron, das in Bewegung ist, hat Welleneigenschaften und man darf diesem Elektron die Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ zuordnen – das ist die Hypothese des französischen Physikers *Louis de Broglie* (1892–1987). Der experimentelle Nachweis dieser äußerst erstaunlichen Behauptung gelang bereits wenige Jahre nach Aufstellung dieser Theorie den beiden amerikanischen Forschern Davisson und Germer. Später konnte sogar der berühmte Doppelspaltversuch mit Elektronen durchgeführt werden. Dieser Versuch des deutschen Physikers Claus Jönsson zeigte in beeindruckender Weise, dass die Elektronen, die auf den Doppelspalt geschickt wurden, Interferenzmuster erzeugten, wie man sie vom Doppelspaltversuch mit Licht her kannte.

Die Hypothese von *de Broglie* hat aber weitere, sehr interessante Folgerungen. Eine betrifft die Antwort auf die folgende Frage: Wie verhält sich ein Elektron, das in einem sehr kleinen Raumbereich „eingesperrt" ist? Das einfachste Modell eines solchen „Teilchengefängnisses" ist der lineare Potenzialtopf. Da sich das Elektron innerhalb seiner Begrenzung nur in Form einer stehenden Welle manifestieren kann, ergeben sich nur ganz bestimmte Impuls- und Energiewerte. Da sich aufgrund der Born'schen Deutung der Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens aus dem Quadrat der Wellenfunktion ergibt, unterliegt auch der Raumbereich, in dem sich das Elektron aufhält, einer gewissen Quantelung. Solche Überlegungen sind grundlegend, um das Wasserstoffatom als quantenphysikalisches Objekt zu verstehen und Begriffe wie Quantenzustand und Orbital im Unterricht einzuführen. Das Modell des linearen Potenzialtopfes ist daher als Vorstufe zu einem tieferen Verständnis des Atoms didaktisch von ganz besonderer Bedeutung.

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden sollten mit den Grundbegriffen der Wellenlehre, insbesondere mit dem Phänomen der stehenden Welle, vertraut sein. Des Weiteren sollten Materiewellen und die Hypothese von *de Broglie* im Unterricht thematisiert worden sein. Kenntnisse zum Bohr'schen Atommodell sind nicht unbedingt erforderlich, erweisen sich aber als nützlich, um die Modelle gegeneinander abgrenzen zu können.

M 1 Der Potenzialtopf – ein Gefängnis für Elektronen



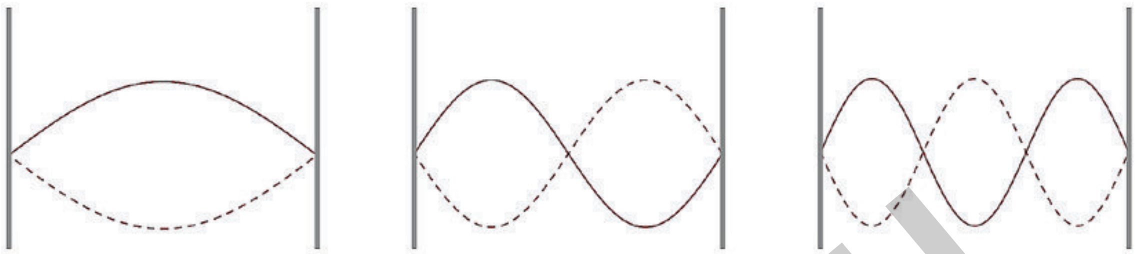
Grafik: M. Borchardt

Nehmen wir an, wir begrenzen den Aufenthaltsraum eines Elektrons auf einen sehr kleinen, eindimensionalen Bereich der Länge L. Links und rechts sind hohe Wände errichtet, die das Elektron nicht überwinden kann. Man spricht auch von Potenzialwällen, die energetisch unendlich hoch sein sollen, also unüberwindbar für das Elektron. Innerhalb dieses „Gefängnisses" darf sich das Elektron aber frei bewegen – es spürt dort keine Kräfte, das Potenzial oder, besser formuliert, die potenzielle Energie des Elektrons ist also null. Nach den Gesetzen der klassischen Physik kann das Elektron alle beliebigen Geschwindigkeiten, also kinetischen Energien, innerhalb des Potenzialtopfes annehmen. Wenn man von außen Energie zuführen würde, könnte sich das Elektron dieser Energie entsprechend bewegen – klassisch gesehen. Quantenphysikalisch sieht die Situation allerdings völlig anders aus. Es ergibt sich nämlich das scheinbar absurde Ergebnis, dass das Elektron nur ganz bestimmte Energien annehmen, also sich nur mit ganz bestimmten Geschwindigkeiten bewegen darf. Warum ist das so?
Wenn sich das Elektron bewegt, können wir ihm nach *de Broglie* eine Wellenlänge zuordnen. Diese Welle kann sich aber im Potenzialtopf nicht beliebig fortbewegen, sondern sie wird an den Wänden reflektiert. Dabei kann es zu einer stehenden Welle kommen. Eine stehende Welle kann aber über längere Zeit nur dann stabil sein, wenn sich die Knoten der stehenden Welle an den Wänden ausbilden – so, als würde man ein Gummiseil an den Wänden festmachen und dieses Seil zu Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen anregen. Dabei würde man feststellen, dass sich nur bei ganz bestimmten Anregungsfrequenzen eine stehende Welle ausbildet.

1. Frischen Sie Ihr Wissen auf: Wiederholen Sie die grundlegenden Eigenschaften stehender Wellen und erinnern Sie sich, was die Hypothese *de Broglies* besagt. Notieren Sie wesentliche Aspekte in Ihren Unterlagen.

M 2 Die Quantelung der Energie

1. Begründen Sie: Die Überlegungen bzgl. einer stehenden Materiewelle innerhalb des Potenzialtopfes der Länge L führen zu der Formel: $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, wobei n natürliche Zahlen darstellt. Binden Sie die unteren Abbildungen in Ihre Erklärung mit ein.



Grafik: M. Borchardt

2. Innerhalb des Potenzialtopfes besitzt das Elektron nur kinetische Energie, die wir mit der bekannten Formel $E = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$ beschreiben können. Für die Wellenlänge des sich bewegenden Elektrons ergibt sich nach *de Broglie* $\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v}$. Außerdem gilt für die Ausbildung einer stehenden Welle $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$. Leiten Sie aus diesen drei Formeln den Ausdruck für die Energiewerte des Elektrons im Potenzialtopf her: $E_n = \frac{h^2}{8 m_e L^2} \cdot n^2$.

3. Erklären Sie, inwiefern aus der soeben hergeleiteten Energieformel der folgende Satz herauszulesen ist: „Die Energie des Elektrons im linearen Potenzialtopf ist gequantelt, d. h., es sind nur ganz bestimmte Energiewerte für das Elektron zulässig."

4. Berechnen Sie die ersten fünf Energiestufen eines Elektrons, das in einem Potenzialtopf der Länge $L = 2 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$ eingesperrt ist. Geben Sie die Energien zunächst in Joule und danach in eV (Elektronenvolt) an.

   Es gilt: $1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$ bzw. $1\,\text{J} = \frac{1}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\,\text{eV}$.

5. Stellen Sie die Energiestufen (in eV) des Potenzialtopfes grafisch in Form eines Termschemas dar.

M 3 Wechsel des Quantenzustandes

Das Elektron lässt sich innerhalb des Potenzialtopfes auf ein höheres Energieniveau heben – vorausgesetzt, wir führen von außen die passende Energie für einen solchen Quantensprung zu. Allerdings wird das Elektron nicht lange auf dem höheren Energieniveau verharren – vielmehr wird es sehr schnell versuchen, wieder eines der tieferen Niveaus zu erreichen. Bei einem solchen „Abwärtssprung" wird Energie in Form von Strahlung frei. Es wird ein Photon der Energie $E_{Ph} = h \cdot f$ abgestrahlt.

1. Wir betrachten den Potenzialtopf des Arbeitsblatts **M 2**, Aufgabe 5, also einen Potenzialtopf der Länge $L = 2 \cdot 10^{-10}$ m. Berechnen Sie, wie viel Energie in Form von Strahlung abgegeben wird, wenn das Elektron vom Niveau n = 3 auf das tiefere Niveau n = 2 wechselt. Geben Sie das Ergebnis in den Einheiten Joule und eV an.

2. Berechnen Sie die Wellenlänge des abgestrahlten Photons und überlegen Sie, ob die Strahlung im sichtbaren Bereich des Lichtspektrums liegt.

3. Der Potenzialtopf soll nun so dimensioniert werden, dass beim Übergang von n = 3 auf n = 2 die Wellenlänge der roten Ha-Linie ($\lambda_{H\alpha} = 656{,}28$ nm) des Wasserstoffatoms emittiert würde.
   a) Leiten Sie zunächst her: Die Länge des Potenzialtopfes ergibt sich mit der Formel $L = \sqrt{\dfrac{h \cdot \lambda_{H\alpha} \cdot (m^2 - n^2)}{8 \cdot m_e \cdot c}}$, wobei m und n die Quantenzahlen (Stufen) des Termschemas darstellen und m_e die Masse des Elektrons ist.
   b) Berechnen Sie nun die Länge des Potenzialtopfes, der beim Übergang des Elektrons vom Quantenzustand 3 auf 2 rotes Licht der Ha-Linie emittieren würde.

4. Auch das Wasserstoffatom ist ein Potenzialtopf, denn das Coulombpotenzial des Kerns hält das Elektron in einem gebundenen Zustand – grenzt seinen Aufenthaltsbereich also gewissermaßen ein. Dennoch bestehen zwischen beiden Modellen erhebliche Unterschiede. Formulieren Sie diese Unterschiede. Sie können sich bei Ihren Überlegungen auch auf das Atommodell von Niels Bohr beziehen.

5. Stellen Sie sich vor, ein Tischtennisball prallt zwischen den beiden Schlägern der Spieler hin und her. Der Aufenthaltsbereich des Balls ist somit begrenzt. Erklären Sie, warum man von der Quantelung der Energie (der Geschwindigkeit) des Balls in dieser makroskopischen Situation nichts bemerkt.

M 4 Nun kommt Farbe ins Spiel

Farbstoffe

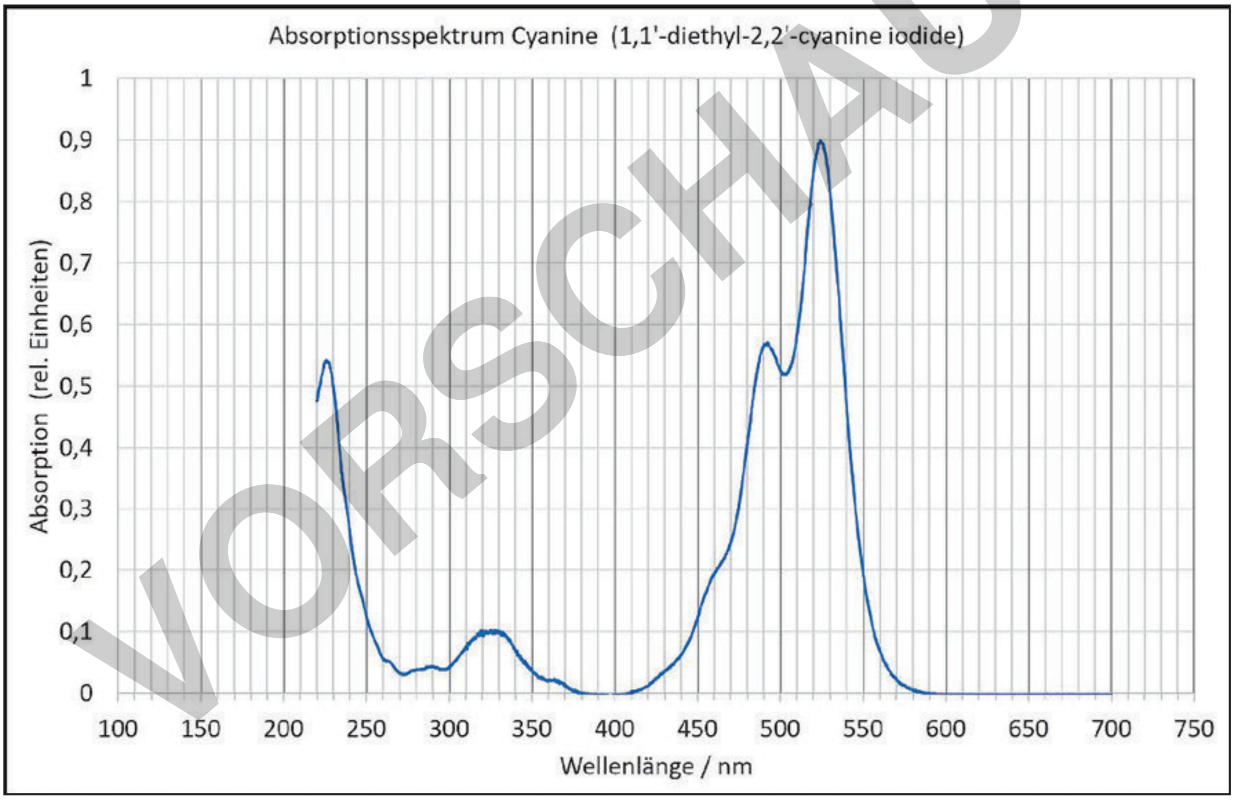
Tomaten, Paprika, Möhren, Blütenpflanzen und Blätter erscheinen uns farbig, weil sie Farbstoffe enthalten, die bestimmte Wellenlängen des weißen Lichts absorbieren. Die übrigen, reflektierten Anteile des Lichtspektrums addieren sich dann zu Mischfarben, welche die Farbigkeit der Gegenstände bestimmen.

Typische Farbstoffmoleküle sind beispielsweise Chlorophyll, Carotin, Cyanin und Lycopin. Als gemeinsames Strukturmerkmal besitzen diese Moleküle ein Gerüst aus Atomen, die über konjugierte Doppelbindungen, d. h. Einfach- und Doppelbindungen im Wechsel, verknüpft sind. Jede Doppelbindung setzt zwei Elektronen frei, die sich ungestört innerhalb der Molekülstruktur bewegen können.

Somit ähnelt ein solches Farbstoffmolekül einem linearen Potenzialtopf, der allerdings nicht ein einzelnes Elektron einschließt, sondern, je nach Anzahl der Doppelbindungen, mehrere Elektronen. In einem solchen Mehrelektronen-System können sich aber nicht alle Teilchen gleichzeitig im tiefsten Energieniveau aufhalten. Vielmehr unterliegt die Verteilung der Elektronen dem Pauli-Prinzip, einer Besetzungsregel, die von dem Physiker Wolfgang Pauli aus quantenphysikalischen Überlegungen abgeleitet wurde. Danach dürfen sich nicht gleichzeitig zwei Teilchen mit übereinstimmenden Quantenzahlen auf einem Energieniveau befinden – sie müssen unterscheidbar sein. Bei den freien Elektronen ist ihr Spin das einzige Unterscheidungsmerkmal. Daher dürfen sich auf jedem Energieniveau im Farbstoffmolekül nur jeweils zwei Elektronen aufhalten – eins mit Spin up und eins mit Spin down.

Das Farbstoffmolekül Cyanin – ein Potenzialtopf für Elektronen

Das Farbstoffmolekül Cyanin gibt es in verschiedenen Varianten, die sich durch die Anzahl der Kohlenwasserstoffbrücken und somit durch ihre räumliche Ausdehnung (Länge L) und das Absorptionsverhalten für Licht unterscheiden. Im Weiteren sollen Sie die Variante[1] des Moleküls untersuchen, die sechs frei bewegliche Elektronen enthält. Der Farbstoff, ein tiefrotes kristallines Pulver, wird in Ethanol aufgelöst und diese Lösung dann mit weißem Licht durchstrahlt. Wenn man das Licht, das die Lösung passiert hat, spektroskopisch untersucht, lässt sich das Absorptionsvermögen des Farbstoffs in Abhängigkeit von der Wellenlänge ermitteln. Es ergibt sich die folgende Kurve[2], die angibt, wie stark bestimmte Wellenlängen beim Durchgang durch die Lösung geschwächt werden. Eine Absorption von 1 bedeutet, dass 100 % der Strahlung dieser Wellenlänge absorbiert werden, und 0 bedeutet, dass diese Strahlung gar nicht absorbiert, also zu 100 % transmittiert wird.



Grafik: M. Borchardt

1. Beschreiben Sie, welche Spektralbereiche des weißen Lichts besonders stark absorbiert werden, und überlegen Sie, warum der Farbstoff uns als tiefrot erscheint.

---

[1] 1,1´-Diethyl-2,2´-cyanine iodide

[2] Datenquelle: *https://omlc.org/spectra/PhotochemCAD/data/052-abs.txt*