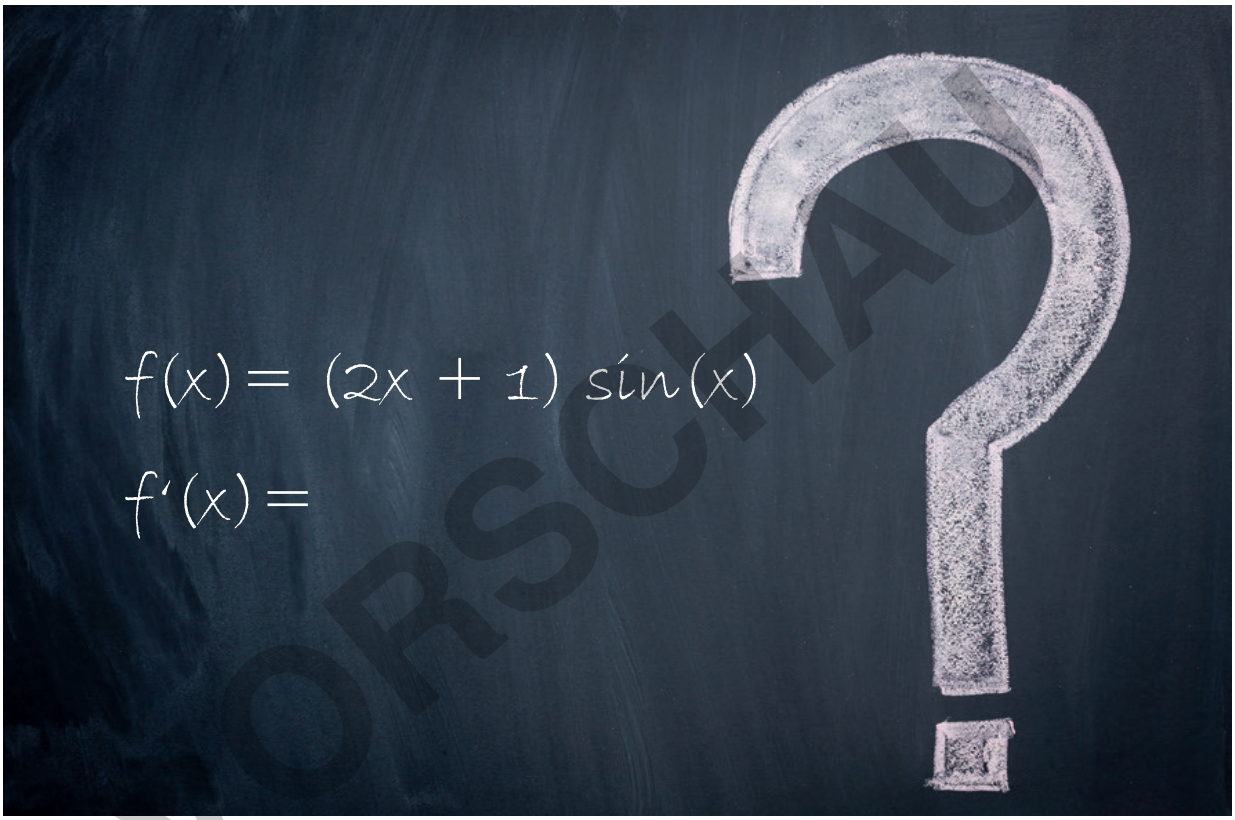
Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau



© cnythzl/DigitalVision Vectors/Getty Images Plus

VORSCHAU

In dieser Unterrichtseinheit üben Ihre Schülerinnen und Schüler anhand von zahlreichen Beispielen und Aufgaben das Ableiten von Funktionstermen mithilfe der Produkt- und der Kettenregel. Sichere Kenntnisse und Fertigkeiten zu diesen Verfahren helfen den Lernenden – neben dem inhaltlichen Verständnis des Ableitungsbegriffs –, wenn sie die Differenzialrechnung inner- oder außermathematisch anwenden. Solche eingeübten Vorgehensweisen helfen den Jugendlichen später im Berufsleben, da sie schon an das korrekte, verständige, schnelle und sichere Abarbeiten von Handlungsvorschriften gewöhnt sind.

netzwerk lernen

RAABE
zur Vollversion

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © cnythzl/DigitalVision Vectors/Getty Images Plus
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

Produkt- und Kettenregel

Oberstufe (grundlegendes und erhöhtes Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Theorie 1

M 1 Ableitung elementarer Funktionen 3

M 2 Funktionen ableiten mit der Produktregel 5

M 3 Funktionen ableiten mit der Kettenregel 7

M 4 Funktionen mit Ketten- und Produktregel ableiten 9

M 5 Differenzieren nach Logarithmieren 11

M 6 Grafische Methoden zum Ableiten 13

M 7 Leistungsfeststellung Gruppe A 14

M 8 Leistungsfeststellung Gruppe B 15

Lösungen 16

© RAABE 2020

VORSCHAU

Die Schüler lernen:

die Produkt- und Kettenregel der Differenzialrechnung schnell und sicher anzuwenden. Des Weiteren lernen Sie einige „Tricks“ und Methoden zum Ableiten kennen.

netzwerk lernen

zur Vollversion

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Ableitung elementarer Funktionen	M1	Ab
Funktionen ableiten mit der Produktregel	M2	Ab
Funktionen ableiten mit der Kettenregel	M3	Ab
Funktionen mit Ketten- und Produktregel ableiten	M4	Ab
Differenzieren nach Logarithmieren	M5	Ab
Grafische Methoden zum Ableiten	M6	Ab
Leistungsfeststellung Gruppe A	M7	LEK
Leistungsfeststellung Gruppe B	M8	LEK

VORSCHAU

© RAABE 2020

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.		

Kompetenzprofil:

Inhalt: Differenzialrechnung, insbesondere Produkt- und Kettenregel, Differenzieren nach Logarithmieren

Medien: Papier und Bleistift

Kompetenzen: mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

netzwerk lernen

zur Vollversion

Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden

Theorie

Definition:

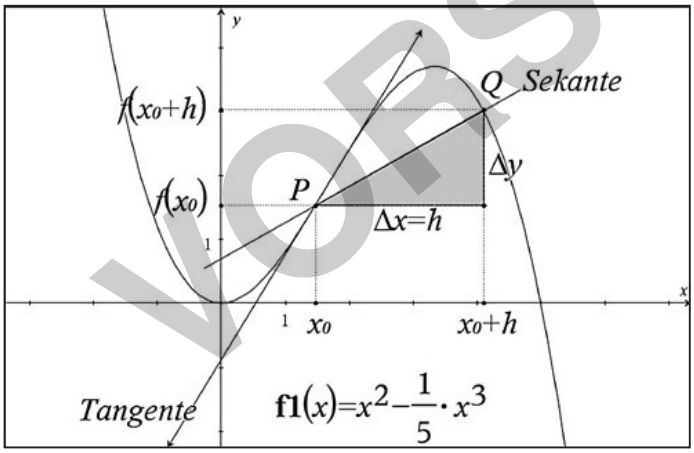
Die 1. Ableitung (momentane Änderungsrate; Differentialquotient) $f'(x_0)$ einer Funktion f an der Stelle x_0 ist der Grenzwert $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, falls dieser existiert. Dieser beidseitige Grenzwert existiert, wenn die einseitigen Grenzwerte existieren (also endliche Zahlen sind) und übereinstimmen.

Für die erste Ableitung einer Funktion f(x) schreibt man auch $\frac{df}{dx}$ oder $\frac{d}{dx}f(x)$. .

Interpretationen:

- Steigung der Tangente des Graphen von f bei x_0
- Physikalisch z. B. bei der Zeit-Weg-Funktion: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0.

© RAABE 2020



© Dr. W. Zappe

Die Steigung einer Geraden lässt sich mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen. In der Abbildung wurden dazu die Punkte P und Q auf dem Graphen der Funktion gewählt. Damit ergibt sich:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_q-y_p}{x_q-x_p}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Wenn nun der Abstand der Punkte bis zu einem unendlich kleinen Abstand verringert wird, also h gegen null strebt, wird die Sekante zwischen den Punkten zur Tangente, welche die gleiche Steigung wie die Funktion an der Stelle x_0 besitzt.

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Ableitungen elementarer Funktionen

f(x)	k	x^n	$\sqrt{x}$	a^x	e^x
mit	$k \in \mathbb{R}$ konstant	(siehe Hinweis)	$x \geq 0$	$a > 0$	
f′(x)	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$a^x \cdot \ln(a)$	e^x

f(x)	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\log_a(x)$	$\ln(x)$
mit			$x \neq \frac{2k+1}{2}\pi;\ k \in \mathbb{Z}$	$x > 0;\ a > 0;\ a \neq 1$	$x > 0$
f′(x)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\frac{1}{x}$

Hinweis: Die Ableitungsregel für $f(x) = x^n$ gilt für ganzzahlige Exponenten und, falls $x > 0$ ist, auch für reelle Exponenten.

© RAABE 2020

Ableitungsregeln

Ableitungsregel	Funktion f(x)	Ableitungsfunktion f′(x)
Faktorregel	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u[v(x)]$	$f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 1 Ableitung elementarer Funktionen

Beispiele:

Ermitteln Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

– $f(x) = 2x^3$

– $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 3x - 2x^{-1}$

– $f(x) = c \cdot \ln(x) + 0{,}1\sin(x) - 2e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$

Lösungen:

– Anwenden der Faktorregel und der Ableitungsregel für $f(x) = x^n$:

$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = 6x^2 \qquad f''(x) = 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 12x$

– Anwenden der Faktor- und der Summenregel sowie der Ableitungsregeln für $f(x) = x^n$, für $f(x) = \sqrt{x}$ und für $f(x) = k$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-1} - 2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}} + 3 + 2 \cdot x^{-2}$$
$$= \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{-2} + 3$$
$$f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} + 2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} + 0 = -\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}} - 4x^{-3}$$

– Anwenden der Faktor- und der Summenregel sowie der Ableitungsregeln für $f(x) = k$, für $f(x) = \ln(x)$, für $f(x) = \sin(x)$ und für $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = c \cdot \frac{1}{x} + 0{,}1 \cdot \cos(x) - 2 \cdot e^x + 0 = \frac{c}{x} + 0{,}1 \cdot \cos(x) - 2 \cdot e^x$$
$$= c \cdot x^{-1} + 0{,}1\cos(x) - 2e^x$$
$$f''(x) = c \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} + 0{,}1 \cdot (-\sin(x)) - 2 \cdot e^x = -c \cdot x^{-2} - 0{,}1 \cdot \sin(x) - 2 \cdot e^x$$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

● Aufgaben 1 und 2 ■ Aufgabe 4 ▲ Aufgabe 5

1. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.

   a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^{\frac{1}{3}}$

   b) $f(t)=\frac{2}{\sqrt{t}}+t$

   c) $g(x)=\frac{x^6-2x^4-4}{6}$

   d) $h(a)=3\cdot\log_{10}a$

2. Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen.
   Formen Sie vorher die Funktionsterme geeignet um bzw. vereinfachen Sie diese.

   a) $f(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2-3x+1}{x}$

   b) $g(x)=(3x-2)^2$

   c) $h(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

   d) $k(x)=\sqrt{x}\cdot x^2$

3. Beachten Sie, von welcher Variablen die Funktion abhängt, und bilden Sie jeweils die 1. und 2. Ableitung.

   a) $f(x)=a\cdot x^3+b^2$

   b) $f(a)=a\cdot x^3+b^2$

   c) $f(b)=a\cdot x^3+b^2$

4. Beurteilen Sie die Anzeige des CAS-Rechners.

⚠ $\frac{d}{dx}\left(\log_{10}(x)\right)$	$\frac{\log_{10}(e)}{x}$

5. Begründen Sie, warum die Funktion $f(x)=|x|$ an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar ist.

   Hinweis:
   Betrachten Sie die einseitigen Grenzwerte $\left(h\to 0^+;\ h\to 0^-\right)$.

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 2 Funktionen ableiten mit der Produktregel

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot e^x$ an der Stelle $x_0=2$.

Lösung:

Wir benötigen die Produktregel.

> Sind die Funktionen u(x) und v(x) an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist auch die Funktion $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:
> $f'(x_0)=u'(x_0)\cdot v(x_0)+u(x_0)\cdot v'(x_0)$.
> **Kurzfassung:** $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$

– Faktoren der zusammengesetzten Funktion identifizieren und einzeln ableiten.
  $u(x)=x^2-x \Rightarrow u'(x)=2x-1 \qquad v(x)=e^x \Rightarrow v'(x)=e^x$
– Faktoren und ihre Ableitungen nach der Produktregel zusammensetzen.
  $f'(x)=(2x-1)\cdot e^x+\left(x^2-x\right)\cdot e^x$
– Falls möglich, den Ableitungsterm vereinfachen.
  $f'(x)=\left[(2x-1)+\left(x^2-x\right)\right]\cdot e^x=\left(x^2+x-1\right)\cdot e^x$
– Funktionswert der Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 berechnen.
  $f'(2)=\left(2^2+2-1\right)\cdot e^2=5e^2$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

● Aufgaben 1 und 2

■ Aufgaben 3, 4 und 5

1. Ermitteln Sie die jeweils 1. Ableitung der Funktion an der Stelle x_0.
   a) $f(x) = x^3 \cdot \ln(x)$ $\quad x_0 = 1$
   b) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos(x)$ $\quad x_0 = \pi$
   c) $f(x) = x \cdot 2^x$ $\quad x_0 = 2$

2. Berechnen Sie jeweils die 2. Ableitung der Funktion.
   a) $f(x) = (2x-1) \cdot e^x$
   b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
   c) $f(x) = 2x \cdot h'(x)$

3. Berechnen Sie $f'(x)$ jeweils zunächst mithilfe der Produktregel.
   Berechnen Sie dann $f'(x)$, indem Sie zuvor den gegebenen Funktionsterm umformen.
   a) $f(x) = x^2 \cdot x^4$
   b) $f(x) = x \cdot (x^2 - x)$
   c) $f(x) = (x-2) \cdot (x+2)$

4. Die Produktregel gilt auch für Produkte aus drei oder mehr Faktoren, z. B. ist
   $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.
   Testen Sie diese Regel für $f(x) = x \cdot x^2 \cdot x^4$.

5. Berechnen Sie den Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion
   $f(x) = 2x \cdot 2^x \cdot \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 3 Funktionen ableiten mit der Kettenregel

Beispiel:

Berechnen Sie den Wert der 1. Ableitung von $f(x)=(2x+3)^5$ an der Stelle $x_0=1$.

Lösung:

Wir benötigen die Kettenregel.

> Ist die Funktion v an der Stelle x_0 und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$ differenzierbar, so ist auch die verkettete Funktion f mit $f(x)=u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0)=u'(v(x_0))\cdot v'(x_0)$.

In dieser Schreibweise ist u die „äußere" und v die „innere" Funktion. Man sagt auch kurz:
„Die Ableitung einer verketteten Funktion ist gleich dem Produkt der Ableitungen von äußerer und innerer Funktion."

– Äußere und innere Funktion identifizieren und ableiten.
  Äußere Funktion: $u(z)=z^5$; ableiten:
  $u'(z)=5\cdot z^4$ mit $z=v(x)=2x+3$
  Innere Funktion: $v(x)=2x+3$; ableiten:
  $v'(x)=2$
– Das Produkt der äußeren und der inneren Ableitung bilden und vereinfachen.
  $f'(x)=v'(x)\cdot u'(z)=2\cdot 5\cdot z^4=10\cdot(2x+3)^4$
– Den Wert von $f'(x_0)$ berechnen.
  $f'(1)=10\cdot(2\cdot 1+3)^4=10\cdot 5^4=6250$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

● Aufgabe 1

■ Aufgaben 2 und 3

▲ Aufgaben 4 und 5

1. Berechnen Sie jeweils den Anstieg der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0.

   a) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ $\quad x_0=2$

   b) $f(x)=\ln(5x+10)$ $\quad x_0=1$

   c) $f(x)=\sin(x^2)$ $\quad x_0=0$

2. Ermitteln Sie die 4. Ableitung von $f(x)=\cos(2x)$.

3. Hinz differenziert $f(x)=\sqrt{5\cdot x^5}$ und gibt als Ergebnis an $f'(x)=\dfrac{25\cdot x^4}{2\cdot\sqrt{5\cdot x^5}}$.

   Kunz verwendet für dieselbe Aufgabenstellung einen CAS-Rechner und erhält das nebenstehende Resultat.
   Klären Sie den scheinbaren Widerspruch zwischen den unterschiedlichen Ergebnisangaben auf.

   $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{5\cdot x^5}\right)$ $\qquad \frac{5\cdot\sqrt{5}\cdot x^4}{2\cdot\sqrt{x^5}}$

4. Hat eine verketteten Funktion f eine lineare Funktion $v(x)=a\cdot x+b$ als innere Funktion, dann gilt $\left[f(a\cdot x+b)\right]'=a\cdot f'(a\cdot x+b)$.
   Begründen Sie diese „lineare Kettenregel“ und erläutern Sie deren Anwendung an drei selbstgewählten Beispielen.

5. Bilden Sie die 1. Ableitung der mehrfach verketteten Funktion $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+4}\right)$.

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen

zur Vollversion

M 4 Funktionen mit Ketten- und Produktregel ableiten

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitungen der Funktionen $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $k(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}$.

Lösung:

Analysieren Sie die Struktur des Funktionsterms unter Berücksichtigung der bekannten Ableitungsregeln.

Der Funktionsterm von f(x) lässt ein Produkt aus zwei Teiltermen $g(x) = x$ und $h(x) = e^{-x}$ erkennen, von denen der Term h(x) eine Verkettung aus der äußeren Funktion $u(z) = e^{z}$ mit der inneren Funktion $z = v(x) = -x$ darstellt.	Der Funktionsterm von k(x) lässt eine Verkettung der Funktionen $u(z) = \sqrt{z}$ mit $z = v(x) = x \cdot \sqrt{x}$ erkennen, wobei die innere Funktion $z = v(x)$ ein Produkt aus den zwei elementaren Funktionen $g(x) = x$ und $h(x) = \sqrt{x}$ ist.

Prüfen Sie, ob der Term äquivalent umgeformt werden kann, damit er sich einfacher ableiten lässt.

Eine solche Möglichkeit ist für die Funktion f nicht erkennbar.	Der Funktionsterm von k(x) lässt sich vereinfachen: $k(x) = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}}$

Wenden Sie die Ableitungsregeln „von außen nach innen" an.

Für die Funktion f wird zunächst die Produktregel und dann die Kettenregel zum Differenzieren angewendet. $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{-x}$ $f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$	Für die Funktion k wird die Potenzregel zum Ableiten angewendet. $k'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}}$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

Aufgaben

Schwierigkeitsgrad:

● Aufgabe 4

■ Aufgaben 1 und 3

▲ Aufgabe 2

1. Bilden Sie jeweils die 1. Ableitung der Funktionen.

   a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x^2)$

   c) $f(x) = x \cdot \sqrt{\sqrt{a+x}}$

   d) $f(x) = 2^x \cdot \sin(2x)$

   e) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{2x}$

   f) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$

2. Stellen Sie einen Term auf, den Sie für die n-te Ableitung von $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ vermuten.

   Hinweis:
   Berechnen Sie dazu die ersten vier Ableitungen und achten Sie auf Muster.

3. Die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $v(x) \neq 0$ lässt sich auch als Produkt schreiben:

   $f(x) = u(x) \cdot [v(x)]^{-1}$.

   Leiten Sie aus diesem Ansatz die Quotientenregel für die Ableitung von f her:

   $$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

4. Berechnen Sie mithilfe der Quotientenregel jeweils die 1. Ableitung von

   a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ mit $x \neq 1$ sowie von

   b) $g(x) = \tan(x)$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 5 Differenzieren nach Logarithmieren

Beispiel:

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion $y = f(x) = x^x$ mit $x > 0$.

Lösung:

Ist eine Funktion der Form $f(x) = u(x)^{v(x)}$ mit $u(x) > 0$ gegeben, dann kann ihre Ableitung nach vorhergehendem Logarithmieren gelingen.

$$y = x^x \quad \Big| \text{ beide Seiten logarithmieren}$$

$$\ln(y) = \ln(x^x) \quad \Big| \text{ Logarithmengesetz } \ln(x^r) = r \cdot \ln(x) \text{ anwenden}$$

$$\ln(y) = x \cdot \ln(x)$$

Linke Seite mit Kettenregel, rechte Seite mit Produktregel ableiten:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \quad \Big| \text{ mit } y = x^x \text{ multiplizieren}$$

$$y' = f'(x) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion