

# Wurzelgleichungen – ein Lernzirkel zur Analysis

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg  
Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz



*Foto: Viktor Lutsenko/iStock/Getty Images Plus*

Das Lösen von Potenzen und Wurzeln und die Äquivalenzumformungen über Gleichungen/ Ungleichungen werden wiederholt. Zur Motivation der Anwendung von Wurzelgleichungen dient eine Aufgabe zu Berechnungen am Obelisken von Luxor, der seit 1836 auf dem Place de la Concorde in Paris steht. Anschließend wird der Begriff der Wurzelgleichung einschließlich einer Schrittfolge zum Lösen derselben eingeführt. Übung und Festigung erfolgen durch das Lösen entsprechender Aufgaben in Gruppenarbeit in Form eines Lernzirkels.

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel  
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe  
Bildnachweis Titel: Viktor Lutsenko/iStock/Getty Images Plus  
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing  
Lektorat: Günter Gerstbrein, Dr.-Viktor-Adler-Str. 3/7, A-2000 Stockerau, Österreich  
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

# Wurzelgleichungen – ein Lernzirkel zur Analysis

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Illustrationen von Dr. Jürgen Leitz

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1 Infoblatt 1: Rechnen mit Potenzen und Wurzeln</b>	<b>3</b>
<b>M 2 Potenzen und Wurzeln – frischen Sie Ihr Wissen auf!</b>	<b>4</b>
<b>M 3 Infoblatt 2: Terme und Gleichungen</b>	<b>5</b>
<b>M 4 Gleichungen/Ungleichungen – Lückentext</b>	<b>6</b>
<b>M 5 Lösen von Gleichungen und Ungleichungen – Aufgaben</b>	<b>8</b>
<b>M 6 Der Obelisk in Paris – Anwendung von Wurzelgleichungen</b>	<b>9</b>
<b>M 7 Kuriositäten – kaum zu glauben und falsch!</b>	<b>11</b>
<b>M 8 Infoblatt 3: Wurzelgleichungen</b>	<b>12</b>
<b>M 9 Wurzelgleichungen – Aufgaben</b>	<b>13</b>
<b>M 10 Lernzirkel</b>	<b>13</b>
<b>M 11 Tippkarten</b>	<b>15</b>
<b>Lösungen</b>	<b>21</b>

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**Ab** = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
 Potenz- und Wurzelgesetze	M1, M2	Ab
 Terme und Gleichungen bzw. Ungleichungen	M3–M5	Ab
 Sachaufgabe zu Wurzelgleichungen – Obelisk in Paris	M6	Ab
 Kuriositäten	M7	Ab
 Wurzelgleichungen und Lösungsverfahren	M8, M9	Ab
 Lernzirkel	M10	Ab

### Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

### Kompetenzprofil:

**Inhalt:** Äquivalenzrelation, Definitionsbereich, Fallunterscheidung, Exponentialfunktion, ganzrationale Funktion, Potenzfunktion, Wurzelfunktion, Potenzgesetze, Wurzelgesetze, Gleichung, Ungleichung, Pyramide, Pyramidion, Pyramidenstumpf, Obelisk

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra, OHP

**Kompetenzen:** Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), Kommunizieren (K6)

## Hinweise

### Vorbemerkungen

Eine Gleichung, in der die Variable unter einer Wurzel steht, nennt man eine Wurzelgleichung. Deren Lösung folgt in der Regel einem strengen Rezept, das die Schüler lernen und üben können. Elementar sind dabei die Definitionsmenge, das Isolieren der Wurzel, das Potenzieren und schließlich das Durchführen der Kontrolle (Probe), bevor die Lösungsmenge der Gleichung angegeben werden kann.

In der Mathematik, Physik, Technik und bei Bauwerken gibt es zahlreiche Anwendungen, die mithilfe von Wurzelgleichungen gelöst werden können.

### Beispiele:

1. Für das Volumen eines Pyramidenstumpfes mit Höhe  $h$ , Grundfläche  $A_G$  und Deckfläche  $A_D$  gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_G + \sqrt{A_G + A_D} + A_D).$$

Wenn  $A_G$  oder  $A_D$  zu bestimmen sind, muss die Wurzelgleichung gelöst werden.

2. Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz beim waagerechten Wurf lautet:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 \cdot t^2}.$$

Dabei bezeichnet  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit,  $g$  die (Erd-)Beschleunigung und  $t$  die Zeit. Ist  $v_0$  oder  $t$  gesucht, muss die Wurzelgleichung gelöst werden.

### Didaktik und Methodik

Die Unterrichtseinheit ist für etwa sieben Unterrichtsstunden vorgesehen. In der ersten Doppelstunde wiederholen die Lernenden Kenntnisse über Gleichungen und festigen das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln in arbeitsteiliger Gruppenarbeit. Mithilfe zweier Arbeitsblätter in Form eines Lückentextes frischen sie ihr Wissen zu Äquivalenzumformungen für Gleichungen und Ungleichungen auf. Die Lösungen dieser beiden Arbeitsblätter können die Schüler auch als Info-Blätter verwenden. Danach vermitteln Sie den Begriff der Wurzelgleichung und eine Schrittfolge zum Lösen von Wurzelgleichungen.

Zur Motivation der Anwendung von Wurzelgleichungen dient eine Aufgabe zu Berechnungen am Obelisken von Luxor, der seit 1836 auf dem Place de la Concorde in Paris steht. Dass ein Nichtbeachten der Umformungsregeln bei Wurzelgleichungen (z. B. Fallunterscheidungen) zu kuriosen Ergebnissen führen kann, zeigt der Mücke-Elefant-Vergleich (Kuriositäten).

Übung und Festigung erfolgen durch das Lösen entsprechender Aufgaben in Gruppenarbeit in Form eines Lernzirkels, der aus vier Stationen (optional Station 5) besteht und von jeder Lerngruppe zu durchlaufen ist. Die Schüler arbeiten in Kleingruppen von maximal drei bis vier Schülern.

### **Jede Station besteht aus drei Aufgaben.**

Der Lernzirkel sieht vor, dass jede Kleingruppe eine Station pro Unterrichtsstunde durchläuft. Je nach Leistungsstärke der Schüler kann diese Zeit verkürzt werden. Aufgaben, die nicht geschafft werden, sind zu Hause fertigzustellen. Mithilfe von Tippkarten können Sie Hinweise zum Lösen jeder Aufgabe geben, ohne dabei die Lösung selbst vorwegzunehmen. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Zu manchen Aufgaben gibt es mehrere Hinweise und Tipps. Lassen Sie die Schüler nach dem Lesen eines Tipps nochmals nachdenken, ob sie nun einen Lösungsweg finden, bevor Sie ihnen den nächsten Tipp zukommen lassen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrertisch aus, sodass die Schüler ihre Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

### **Lernvoraussetzungen**

- Potenz- und Wurzelgesetze
- Rechnen mit Potenzen und Wurzeln
- Begriffe Gleichung/Ungleichung
- Gleichungsarten und äquivalente Umformungsregeln
- Definitionsbereich von Wurzeln
- Lösungsmenge einfacher Wurzelgleichungen