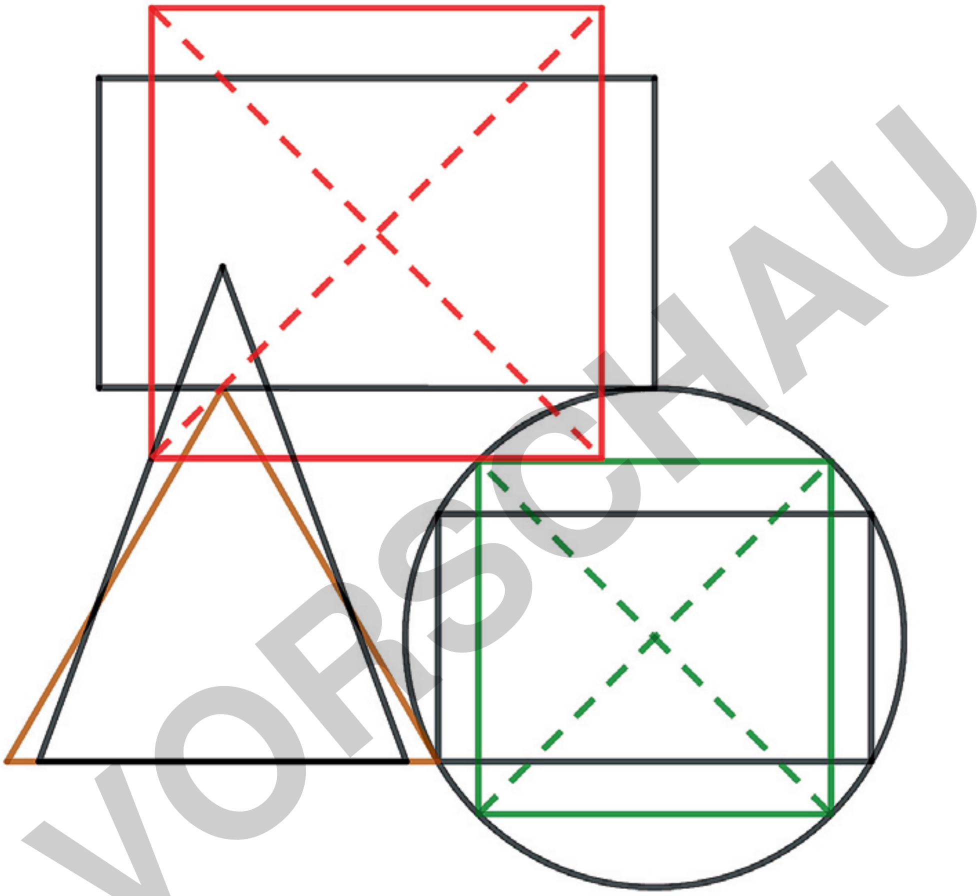
Extremale Aussagen

Wolfgang Lübbe, Rostock
Illustrationen von Wolfgang Lübbe



Grafik: Wolfgang Lübbe

Dieser Beitrag motiviert Ihre Schülerinnen und Schüler und fordert sie auf, sich mit der Beweisführung in der Mathematik anhand extremaler Aussagen zu beschäftigen und diese an entsprechenden Beispielen zu überprüfen. Dazu verwenden sie Zusammenhänge aus der Geometrie der Ebene (Rechteck – Quadrat; gleichschenkliges Dreieck – gleichseitiges Dreieck) und des Raumes (Quader – Würfel, Pyramide – Tetraeder). Die Beweise führen die Jugendlichen dabei in den klassischen Schritten: Voraussetzung, Behauptung, Beweis.

Extremale Aussagen

Oberstufe (weiterführend)

Wolfgang Lübbe, Rostock
Illustrationen von Wolfgang Lübbe

Die Schüler lernen:

Die Schülerinnen und Schüler vervollkommnen durch die Lösung der hier gestellten Aufgaben ihr Wissen und Können im Rahmen mathematischer Beweise. Ihnen wird anschaulich vor Augen geführt, dass sehr viele Beispiele, mögen sie einen mathematischen Zusammenhang auch noch so nahelegen, im Sinne der Mathematik keinen Beweis darstellen. Den Lernenden wird dabei (sicher zum wiederholten Male) bewusst gemacht, dass Beweise in der Mathematik allgemeingültig geführt werden müssen, d. h. auf der Basis von Variablen.
Die Beweisführung muss dabei in drei Schritten erfolgen:

– Festlegen der Voraussetzungen
– Formulieren der Behauptung
– Beweis der Behauptung unter Verwendung der Voraussetzungen

Abschließend kann die Richtigkeit der gefundenen Zusammenhänge und Abhängigkeiten jeweils anhand eines entsprechenden konkreten Beispiels überprüft werden. Ziel der Bearbeitung dieser Aufgaben ist die Weiterentwicklung des mathematisch-logischen Denkvermögens der Lernenden.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle
TA = Tafelbild

Thema	Material	Methode
Extremale Aussagen – Theorie	M1	Ab, TA
Aufgaben	M2	Ab
Übungsaufgaben	M3	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Rechteck – Quadrat; gleichschenkliges Dreieck – gleichseitiges Dreieck; Quader – Würfel; dreiseitige Pyramide – Tetraeder; Beweisführung; lokale Extrema
Medien: GTR/CAS, GeoGebra
Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Niveau der Differenzierung

Die Aufgabe 1a hat einfaches, die Aufgabe 1b schwieriges Niveau.

Aufgabe 2a – einfaches Niveau

Aufgabe 2b – mittleres Niveau

Aufgabe 2c – schwieriges Niveau

Die Zusatzaufgaben 1a, 1b und 2a bis 2d haben einfaches, die Zusatzaufgaben 1c, 1e und 2e mittleres und die Zusatzaufgabe 1d schwieriges Niveau.

Einsatz im Unterricht

Die Aufgaben können Sie im Unterricht in Einzel-, Partner- und/oder in Kleingruppenarbeit lösen lassen. Dabei sind die Aufgaben auf einfachem Niveau sehr gut für die Einzelarbeit (auch für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler), die Aufgaben auf mittlerem und schwierigem Niveau für die Partner- bzw. Kleingruppenarbeit geeignet. Leistungsschwächere und Leistungsstärkere sollten dabei zusammenarbeiten, damit alle ein Erfolgserlebnis verbuchen können.

Die Zusatzaufgaben (**M 3**) können Sie zur weiteren Übung, als Hausaufgabe, aber auch als Lernerfolgskontrolle nutzen. Für diese Aufgaben sind im Beitrag nur die wesentlichen Lösungsschritte angegeben.

Die Nutzung von GTR und CAS ist nur begrenzt möglich und sinnvoll.

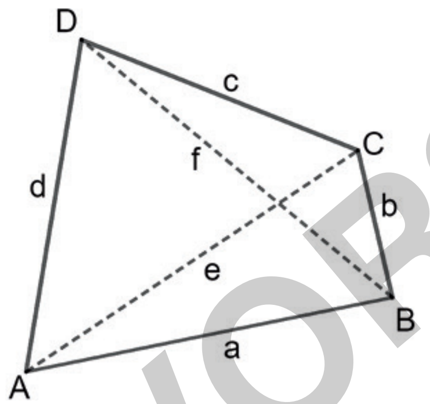
M 1 Extremale Aussagen – Theorie

Theorie: Konvexes Viereck

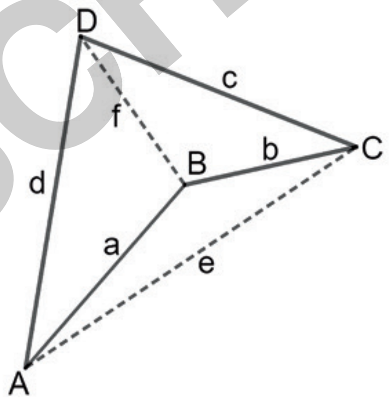
Durch vier voneinander verschiedene Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, können genau sechs Geraden gezeichnet werden, die jeweils zwei Punkte miteinander verbinden. Die vier Punkte sind Eckpunkte des Vierecks. Für sie wird ein bestimmter Umlaufsinn (mathematisch positiver Drehsinn, d. h. entgegen Uhrzeigerrichtung) festgelegt. Die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte sind die Seiten, die Verbindungsstrecken nicht aufeinanderfolgender Punkte die Diagonalen des Vierecks. Liegen die Diagonalen vollständig im Inneren des Vierecks, so ist es ein *konvexes* Viereck, im anderen Fall ein *konkaves* Viereck.

Beispiele für konvexe Vierecke: Quadrat, Rechteck, Rhombus (Raute), Rhomboid (Parallelogramm), Drachenviereck, Trapez, Trapezoid.

Konvexes Viereck:

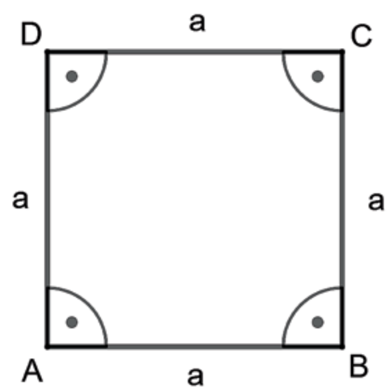


Konkaves Viereck:



Regelmäßige konvexe n-Ecke haben n gleich lange Seiten und n gleich große Innenwinkel. Jedem regelmäßigen konvexen n-Eck kann ein Kreis einbeschrieben werden, für den die Seiten des n-Ecks Tangenten sind. Ihm kann ein Kreis umbeschrieben werden, in dem die Seiten des n-Ecks Sehnen sind.

Beispiele für regelmäßige konvexe n-Ecke: regelmäßiges Sechseck, regelmäßiges (gleichseitiges) Dreieck, regelmäßiges Viereck (Quadrat).



Grafiken: Wolfgang Lübbe, Rostock