Das Problem der vertauschten Briefe oder Fixpunkte einer Permutation

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

© andresr/E+/Getty Images Plus

Hektisch verteilt die Angestellte die Rechnungen in die voradressierten Umschläge. „Fertig!“, denkt sie, verlässt zufrieden das Büro und wirft die Post direkt noch ein. Doch welche unliebsamen Überraschungen könnten auf sie zukommen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jede Rechnung im richtigen Kuvert?

„Das Problem der vertauschten Briefe“ ist ein bekanntes Problem der Kombinatorik. Ihre Schülerinnen und Schüler lernen in diesem Beitrag Fixpunkte von Permutationen kennen und lösen dieses sowie ähnliche Probleme.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © andresr/E+/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Das Problem der vertauschten Briefe oder Fixpunkte einer Permutation

Oberstufe (weiterführend)

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Die Schüler lernen:

den Begriff Permutation genauer kennen und erarbeiten sich Fixpunkte von Permutationen anhand von zahlreichen lebensnahen Beispielen und Aufgaben.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Drei Briefe oder Fixpunkte einer Permutation für n = 3	M1	Ab
Permutationen ohne Fixpunkte	M2	Ab
Permutationen mit k Fixpunkten	M3	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Summendarstellung, Permutationen, Fixpunkte von Permutationen, fixpunktfreie Permutationen, Permutationen mit k Fixpunkten

Medien: GTR

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

M 1 Drei Briefe oder Fixpunkte einer Permutation für n = 3

Von den Abzählvorgängen ist bekannt, dass jede Anordnung von n paarweise verschiedenen Elementen in einer bestimmten Reihenfolge *Permutation der Elemente ohne Wiederholung* heißt, wobei es n! verschiedene solcher Permutationen gibt.
Zu jeder Anordnung mit drei unterschiedlichen Elementen gibt es $3! = 6$ Permutationen.
Ordnet eine Permutation einem Element wieder genau das gleiche zu, dann heißt dieses Element ein **Fixpunkt** der Permutation.

Definition: M sei eine endliche Menge mit den Elementen m_n, $n \in \mathbb{N}$. Eine Permutation von M ist eine bijektive Abbildung $f: M \to M$. Gilt für ein Element $f(m_n) = m_n$, dann ist dies ein Fixpunkt der Permutation.

Beispiel:
Im folgenden Pfeildiagramm sehen Sie eine Permutation der Menge $M = \{1; 2; 3\}$:
Die Elemente „123" werden zugeordnet und ergeben „321".
Damit ist das Element 2 ein Fixpunkt der Permutation.

$1 \mapsto 3$
$2 \mapsto 2$
$3 \mapsto 1$

Gelöst werden soll jetzt folgende Fragestellung:

Frage:
Wie viele Fixpunkte besitzt eine Permutation mit drei Elementen?

Lösung:
Schreibt man die ursprüngliche und die neue Anordnung in zwei Zeilen untereinander, so kann man die Fixpunkte der Permutationen direkt ablesen. Diese Matrix-Schreibweise nennt man auch die Zweizeilenform:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{drei Fixpunkte}$$

$$\left.\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&3&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&2&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&1&3\end{pmatrix}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ein Fixpunkt} \qquad \left.\begin{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 3&1&2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&1\end{pmatrix}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{kein Fixpunkt}$$

Für $n = 3$ Elemente gibt es eine Permutation mit drei Fixpunkten, drei mit einem und zwei, die fixpunktfrei sind. Eng verwandt damit ist das folgende Problem:

Frage: Bernoulli-Euler'sches Problem der vertauschten Briefe

Jemand schreibt drei individuelle Briefe und adressiert entsprechend drei Umschläge. Dann werden die drei Briefe rein zufällig in einen der drei Umschläge gesteckt, ohne dass auf die Adresse geachtet wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis E „Kein Brief steckt im richtigen Umschlag" auf?

Lösung:

1. Möglichkeit: Da vorausgesetzt werden kann, dass die Briefe mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in die Umschläge gelangen, erhält man mit den Überlegungen zu den Fixpunkten von drei Elementen (siehe oben) für das Ereignis E demnach die Laplace-Wahrscheinlichkeit

$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (Wahrscheinlichkeit einer Permutation ohne Fixpunkt).

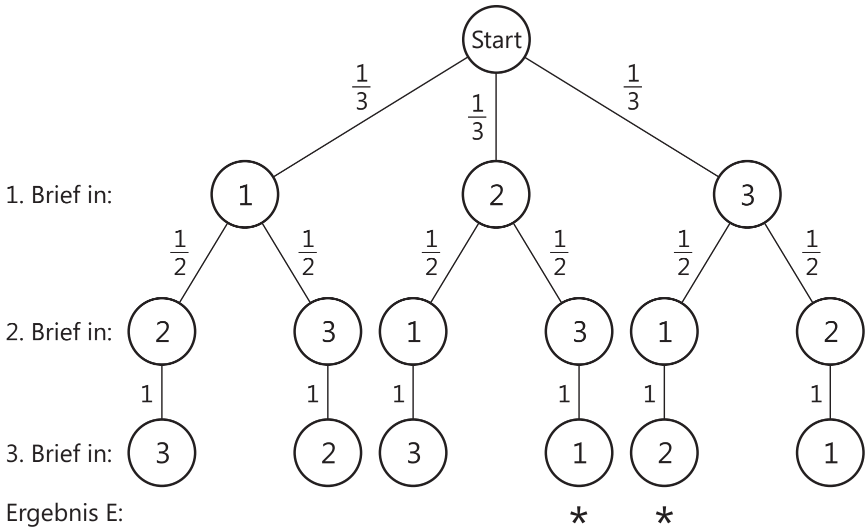
Entsprechend gilt:

E': „Alle drei Briefe im richtigen Umschlag" $\Rightarrow P(E') = \frac{1}{6}$ (drei Fixpunkte) und

E'': „Genau ein Brief im richtigen Umschlag" $\Rightarrow P(E'') = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (ein Fixpunkt).

Anmerkung: Das Ereignis E''' „Genau zwei Briefe im richtigen Umschlag" ist nicht möglich. Wenn zwei Briefe richtig stecken, dann auch der dritte.

2. Möglichkeit: Eine ähnliche Lösung erhält man mithilfe eines Baumdiagramms:



© Dr. Wolfgang Zettlmeier

Mithilfe der 2. Pfadregel findet man: $P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

3. Möglichkeit: Mit dem Satz von Sylvester und den Ereignissen

E_i: „Der i-te Brief steckt im Umschlag i" (i = 1, 2, 3) gilt mit

$P(E_1) = \frac{1}{3}$ und $P(E_i \cap E_j) = \frac{1}{6}$ für $i \neq j$ und nach Lösungsmöglichkeit 1 bzw. 2:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{1}{6}: \quad P(E) = P\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}\right) = P\left(\overline{E_1 \cup E_2 \cup E_3}\right) = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$

$$= 1 - \left[P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Beispiele:

– Drei individuelle Briefe werden rein zufällig in drei mit Adressen versehene Umschläge gesteckt. Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Briefe an, die im **richtigen Umschlag** stecken. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z sowie deren Erwartungswert und deren Varianz.

Lösung:

Nach obigen Überlegungen erhält man:

z	0	1	2	3
P(Z = z)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

Damit erhält man:

$$E(Z)=\sum_{z=0}^{3} z\cdot P(Z=z)=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=1$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\left(1^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{6}\right)-(1)^2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1=1$$

– Drei individuelle Briefe werden rein zufällig in drei mit Adressen versehene Umschläge gesteckt. Das Ereignis E_i gibt an, dass der i-te Brief im i-ten Umschlag steckt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$A=E_1\cap E_2\cap E_3$, $\quad B=E_1\cup E_2\cup E_3$,
$C=\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_3}$, $\quad D=\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap E_3$.

Lösung:

Nach den vorher gemachten Überlegungen gilt:

A = „Jeder Brief steckt richtig“ $\Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$

B = „Mindestens ein Brief steckt richtig“ $\Rightarrow P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

C = „Kein Brief steckt richtig“ $\Rightarrow P(C)=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

D = „Nur der dritte Brief steckt richtig“ $\Rightarrow P(D)=\frac{1}{6}$ (siehe Baumdiagramm)

Aufgabe

Vier individuelle Briefe werden rein zufällig in vier mit Adressen versehene Umschläge gesteckt. Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Briefe an, die im richtigen Umschlag stecken. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße Z sowie deren Erwartungswert und deren Varianz.

M 2 Permutationen ohne Fixpunkte

Die Lösung der folgenden Aufgabe wird angestrebt:

Frage:

Wie viele fixpunktfreie Permutationen von n Elementen gibt es?

Lösung:

Die gesuchte Anzahl der fixpunktfreien Permutationen werde mit z_n bezeichnet, wobei n die Zahl der Elemente ist. Mit den Überlegungen aus **M 1** und der Aufgabe 1 ist bereits bekannt:

$z_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow z_3 = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_4 = 9$$

usw.

Zur allgemeinen Bestimmung von z_n kann man folgende Überlegungen anstellen:
Das Element 1 darf nicht auf Platz 1 stehen, d. h., ihm stehen n – 1 Plätze zur Verfügung. Angenommen die 1 steht auf Platz 2: Steht die 2 auf Platz 1, dann können die Plätze 3, 4, …, n mit den Elementen 3, 4, …, n auf z_{n-2} Arten fixpunktfrei besetzt werden.

Beispiel:

Betrachten Sie bei vier Elementen die erste Permutation. Wenn Sie hier die ersten zwei Spalten fixieren, bleiben nur die Zahlen 3 und 4 übrig, die nur auf eine Art – wie jede Menge mit zwei Elementen – fixpunktfrei zugeordnet werden können. Daher gibt es für n – 2 Elemente z_{n-2} fixpunktfreie Permutationen.

Steht die 2 nicht auf Platz 1, dann müssen n – 1 Elemente auf n – 1 Plätze verteilt werden, d. h., es gibt z_{n-1} fixpunktfreie Arten. Da aber die 1 auf n – 1 Plätzen stehen kann, gilt:
$z_n = (n-1)\cdot(z_{n-1} + z_{n-2})$.

Mit $z_1 = 0$ und $z_2 = 1$ erhält man der Reihe nach:

$$z_3 = 2\cdot(z_1 + z_2) = 2\cdot(0+1) = 2$$
$$z_4 = 3\cdot(z_3 + z_2) = 3\cdot(2+1) = 9$$
$$z_5 = 4\cdot(z_4 + z_3) = 4\cdot(9+2) = 44$$
$$z_6 = 5\cdot(z_5 + z_4) = 5\cdot(44+9) = 265$$

usw.

Formt man obige Rekursionsformel um, so erhält man:

$$z_n = n\cdot z_{n-1} + n\cdot z_{n-2} - z_{n-1} - z_{n-2}$$
$$z_n - n\cdot z_{n-1} = -\left[z_{n-1} - (n-1)z_{n-2}\right]$$

Setzt man $x_n = z_n - n\cdot z_{n-1}$ bzw. $x_{n-1} = z_{n-1} - (n-1)\cdot z_{n-2} \Leftrightarrow z_{n-2} = \dfrac{z_{n-1} - x_{n-1}}{(n-1)}$

und setzt diese Ausdrücke ein, erhält man Folgendes:

$$x_n = (-1)\cdot\left[z_{n-1} - (n-1)\cdot\left(\frac{z_{n-1} - x_{n-1}}{(n-1)}\right)\right]$$
$$x_n = (-1)\cdot\left[z_{n-1} - z_{n-1} + x_{n-1}\right]$$
$$x_n = (-1)\cdot x_{n-1}$$

Mit $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2,\ z_4 = 9$ gilt dann:

$$x_2 = z_2 - 2\cdot z_1 = 1 - 2\cdot 0 = 1 = (-1)^2$$
$$x_3 = z_3 - 3\cdot z_2 = 2 - 3\cdot 1 = -1 = (-1)^3$$
$$x_4 = z_4 - 4\cdot z_3 = 9 - 4\cdot 2 = 1 = (-1)^4$$

usw.

$$\Rightarrow x_n = (-1)^n$$

Und damit gilt:

$$(-1)^n = z_n - n\cdot z_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow z_n = n\cdot z_{n-1} + (-1)^n.$$

Setzt man n gleich n – 1 erhält man:

$$z_{n-1} = (n-1)\cdot z_{n-2} + (-1)^{n-1}$$

Fragt man nach den Wahrscheinlichkeiten, dass eine Permutation von n Elementen fixpunktfrei ist, so erhält man für dieses Ereignis E mit den obigen Überlegungen:

$$P(E)=\frac{z_n}{n!}=\frac{n\cdot z_{n-1}}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{z_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}$$

Setzt man $z_{n-1}=(n-1)\cdot z_{n-2}+(-1)^{n-1}$, erhält man:

$$P(E)=\frac{\left((n-1)\cdot z_{n-2}+(-1)^{n-1}\right)}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{z_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}.$$

Führt man dies fort mit $z_{n-2}=(n-2)\cdot z_{n-3}+(-1)^{n-2}$ usw., kommt man auf

$$\frac{\left((n-2)\cdot z_{n-3}+(-1)^{n-2}\right)}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{z_{n-3}}{(n-3)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}$$

$$P(E)=\frac{z_1}{(1)!}+\frac{(-1)^2}{(2)!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-3}}{(n-3)!}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\ldots=0+\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Verwendet man noch $\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}=1-1=0$, so erhält man (achten Sie auf den Laufindex i):

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=\left(\underbrace{\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}}_{=0}+\frac{(-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)=\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}=P(E)$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$ nähert sich die Wahrscheinlichkeit für eine fixpunktfreie Permutation bei steigendem n an den Wert $e^{-1}\approx 0{,}36788\approx 36{,}79\,\%$ an. Da die natürliche Exponentialfunktion sehr schnell konvergiert, gilt für $n\geq 7: P(E)\approx\frac{1}{e}\approx 0{,}36788$.

Für das Ereignis E', dass eine Permutation mindestens einen Fixpunkt besitzt, erhält man: $P(E')=1-P(E)=1-\frac{1}{e}\approx 0{,}63212\approx 63{,}21\,\%$.

Wenn man jetzt von den Permutationen zum Problem der **vertauschten Briefe** übergeht und fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass keiner der n Briefe im richtigen Umschlag steckt, so erhält man das obige Ergebnis.

Alternative Herleitung:

Es gibt insgesamt n! Möglichkeiten, die n Briefe auf n Umschläge zu verteilen. Es gebe wieder E_i das Ereignis an, dass der Brief i im i-ten Umschlag (also richtig) steckt. Dafür gibt es nach den vorherigen Überlegungen (n – 1)! Möglichkeiten, d. h., für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$P(E_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$, wobei es für den i-ten Brief $\binom{n}{1}=n$ Möglichkeiten der Auswahl des Platzes gibt.

Das Ereignis E „Kein Brief im richtigen Umschlag“ lässt sich durch

$E=\overline{E_1}\cap\overline{E_2}\cap\ldots\cap\overline{E_n}=\overline{E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n}$ darstellen, d. h., es gilt:

$P(E)=P\left(\overline{E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n}\right)=1-P(E_1\cup E_2\cup\ldots\cup E_n)$.

Auf diesen Ausdruck kann man die Formel von Sylvester anwenden mit

$$P(E_i\cap E_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n(n-1)}, i<j,$$

wobei es für die Auswahl der beiden Briefe $\binom{n}{2}$ Plätze gibt.

$$P(E_i\cap E_j\cap E_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}, i<j<k,$$

wobei es für die Auswahl der drei Briefe $\binom{n}{3}$ Plätze gibt.

$$P(E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_n)=\frac{(n-n)!}{n!}=\frac{0!}{n!}=\frac{1}{n!}.$$

Damit ergibt sich insgesamt mit der Siebformel von Sylvester für P(E):

$$1-\left[\sum_{i=1}^{n}P(E_i)-\sum_{i<j}P(E_i\cap E_j)+\sum_{i<j<k}P(E_i\cap E_j\cap E_k)+\ldots+(-1)^{n-1}P(E_1\cap E_2\cap\ldots\cap E_n)\right]$$

$$=1-\left[\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n(n-1)}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n!}\right]$$

$$=1-\left[\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!\cdot n}-\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!\cdot n(n-1)}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right]$$

$$=1-\left[\frac{n!}{n!\cdot 1!}-\frac{n!}{n!\cdot 2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right]$$
$$=1-\left[\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right]=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)\cdot(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}$$
$$=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n}\cdot\frac{1}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}$$

Damit hat man das gleiche Ergebnis wie vorher gefunden. Für $n \geq 7$ gilt:
$P(E)=\frac{1}{e}\approx 0{,}36788\approx 36{,}79\ \%$.

Beispiel:

Fünf Freunde treffen sich zu einer gemütlichen Weihnachtsfeier. Jeder hat genau ein Geschenkpäckchen mitgebracht. Danach werden die fünf Geschenke verlost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat keiner sein eigenes Päckchen?

Lösung:

$$P(E)=\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^{i}}{i!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}$$
$$=\frac{44}{120}\approx 0{,}36667\approx 36{,}67\ \%$$

Aufgaben

1. Acht Besucher einer Veranstaltung geben ihre Schirme an der Garderobe ab. Bei der Rückgabe erhält jede der Personen rein zufällig einen Schirm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person ihren eigenen Schirm erhält?
2. Im Supermarkt sind von dreißig Artikeln acht Preisschilder heruntergefallen. Der Kassierer bringt zwei davon wieder richtig an, weil er den Preis im Kopf hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim reinen Raten die restlichen Preisschilder alle richtig zuordnet?
3. Für eine Verlosung stellen alle der 27 Klassenmitglieder einen Preis zur Verfügung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner seinen eigenen Preis zurückerhält?