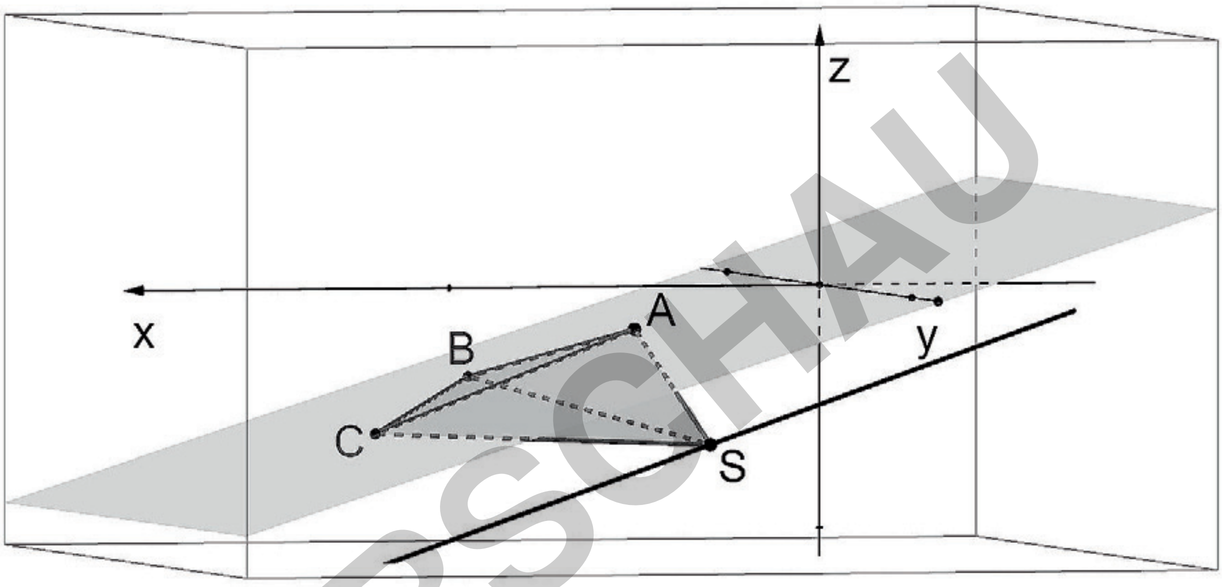
Extremwertprobleme bei Punkte-, Geraden- und Ebenenscharen

Günther Weber, Brilon
Abbildungen von Günther Weber



Grafik: Günther Weber

Wählt man für den Parameter bei einer Punkte-, Geraden- oder Ebenenschar einen gültigen Zahlenwert, so erhält man genau einen Punkt, eine Gerade oder eine Ebene. Im Beitrag überprüfen die Schülerinnen und Schüler die Lagebeziehung von Punkten der Schar zu einer Geraden bzw. zu einer Ebene oder von Geraden einer Schar zu einer Ebene. Die Lernenden bestimmen den Parameter so, dass bestimmte Eigenschaften wie die Gleichschenkligkeit von Dreiecken erfüllt sind. Die Bestimmung des Parameters kann zu einem Extremwertproblem führen, bei dem die Zielfunktion aus einer Funktion besteht, die selbst aus einer Betragsfunktion und einer Wurzelfunktion verkettet ist. Mit den Methoden der Analysis ermitteln die Jugendlichen hierbei das Extremum. Insbesondere bei den Extremwertaufgaben können die Auswirkungen unterschiedlicher Parameterwerte altersgerecht veranschaulicht werden.

Extremwertprobleme bei Punkte-, Geraden- und Ebenenscharen

Oberstufe (weiterführendes Niveau)

Günther Weber, Brilon
Abbildungen von Günther Weber

Die Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie berechnen die Innenwinkel und den Flächeninhalt von Dreiecken sowie das Volumen einer Pyramide. Die Lernenden untersuchen die Lagebeziehung von Punkten zu Geraden und Ebenen bzw. von Geraden und Ebenen. Ebenso berechnen sie den Schnittwinkel von Gerade und Ebene bzw. den Schnittwinkel von zwei Ebenen. Sie lösen Abstandsprobleme und bestimmen mit den Methoden der Analysis Extremwertprobleme, die sich aus der Winkel- oder Abstandsberechnung ergeben.
Die Aufgaben fördern eine Vielzahl der Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler in den Bereichen analytische Geometrie und Analysis vor dem Abitur verfügen sollten. Sie eignet sich daher auch gut zur Vorbereitung auf das Abitur.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	LearningApps – interaktive Lernbausteine	
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Flächeninhalt und Innenwinkel im Dreieck, Punktprobe Punkt – Ebene, Geradengleichung, Ebenengleichung, Lagebeziehung von Punkt und Ebene, Gerade und Ebene sowie Ebene und Ebene, Schnitt und Schnittwinkel von Gerade und Ebene sowie Ebene und Ebene, Abstand Punkt – Gerade und Punkt – Ebene, Volumen Pyramide, Extremwertproblem

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Eine Punktprobe oder die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen wissen, welche Eigenschaften bei der Lagebeziehung von Punkt und Gerade, von Gerade und Ebene bzw. von Ebene zu Ebene erfüllt sein müssen. Sie können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen (auch mit Parameter) durchführen, Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Pyramiden bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, eine Zielfunktion zur Bestimmung von Extrempunkten aufzustellen und das Extremwertproblem mit den Methoden der Analysis zu lösen. Sie wenden die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel sicher an und wissen, dass die Betragsfunktion im „Knick" nicht differenzierbar ist.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
(aufgerufen am 4.06.2021) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden und zwischen Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Die Inhaltsfelder Analysis, analytische Geometrie sollen laut Kernlehrplan zudem nicht isoliert nebeneinander, sondern konzeptionell vernetzt z. B. durch übergreifende Konzepte wie den funktionalen Zusammenhang betrachtet werden. So spricht der Beitrag auch folgende Kompetenzen aus dem Bereich der Analysis an.

Die Schülerinnen und Schüler

- führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück,
- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um den Einfluss der Parameter auf Punkte, Geraden und Ebenen zu erkunden. Ebenso bieten digitale Werkzeuge die Möglichkeit der experimentellen Lösung von Extremwertproblemen.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Bei Aufgabe 1b klären Sie im Unterrichtsgespräch, welche drei Möglichkeiten es für ein gleichschenkliges Dreieck gibt. Nachdem klar ist, für welche Parameter k ein gleichschenkliges Dreieck vorliegt, kann die Berechnung der Innenwinkel und des Flächeninhalts gruppenweise geschehen. Da es mehrere Vorgehensweisen zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks gibt (siehe auch die Lösung von Aufgabe 4b), erarbeiten Sie diese am besten auch im Vorfeld im Unterrichtsgespräch und die Gruppen wählen dann eine der Möglichkeiten aus. Im Anschluss stellen die Gruppen ihren Lösungsweg vor und die Klasse diskutiert die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten.

Bei den Aufgaben 2, 3 und 4 wiederholen die Jugendlichen die Bedingungen für bestimmte Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen. Bei Aufgabe 2b sollten Sie insbesondere bei leistungsschwächeren Lerngruppen den Ansatz gemeinsam besprechen.

M 1 Aufgaben

Gegeben sind die Punktescharen

$B_k(k+2\,|\,-3\,|\,-2)$ und $C_k(6\,|\,0\,|\,-k-1)$ sowie der Punkt $A(2\,|\,-2\,|\,-1)$.

1.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar g_k, die durch die Punkte B_k und C_k verläuft. Überprüfen Sie, ob es ein k gibt, sodass der Punkt A auf einer Geraden der Schar liegt.

b) Überprüfen Sie, ob es ein k gibt, sodass das Dreieck AB_kC_k gleichschenklig ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Längen der Seiten, die Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

2.

a) Durch die Punkte A, B_k und C_k ist eine Ebenenschar E_k festgelegt. Geben Sie die Drei-Punkte-Form der Ebenengleichung an und formen Sie diese um in die Normalenform.

b) Berechnen Sie, welche Bedingungen die Parameter zweier Ebenen der Schar erfüllen müssen, damit die Ebenen senkrecht aufeinanderstehen.

c) Bestimmen Sie die Ebene F der Schar E_k, die zur Ebene E_{-3} senkrecht steht.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden h der beiden Ebenen E_{-3} und F.

3.

a) Begründen Sie, dass die Ebene E_2 der Schar die y-Achse enthält, und berechnen Sie den Schnittwinkel der Ebene E_2 mit der xy-Koordinatenebene.

b) Überprüfen Sie, ob die Punkte B_3 und C_3 auf verschiedenen Seiten der Ebene E_2 liegen.

c) Gegeben ist die Geradenschar

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a so, dass die Gerade der Schar parallel zur Ebene E_2 verläuft.

d) Zeigen Sie, dass keine Gerade der Geradenschar die Ebene E_2 senkrecht schneidet.

e) Bestimmen Sie a so, dass der Winkel zwischen der Geraden der Schar und der Ebene E_2 maximal wird.