Einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen ermitteln

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst

Wie baut man eine Straßenbahnbrücke, zählt Käferpopulationen und sagt Wasserstände an der Nordseeküste voraus? Drei völlig unterschiedliche Probleme, doch ihre Lösung ist gleich: Man modelliert die Vorgänge mit Funktionen. In diesem Beitrag bestimmen Ihre Schülerinnen und Schüler anhand von lebensnahen Aufgaben mit den Werkzeugen der Analysis die Funktionsterme von ganzrationalen, gebrochen-rationalen und trigonometrischen Funktionen sowie Wurzel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © tunart/E+/Getty Images Plus (Freiheitsbrücke Budapest, Ungarn)
Illustrationen: Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Daniela Link, Mönchengladbach

Einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen ermitteln

Oberstufe (grundlegend)

Carlo Vöst, Oliva, Spanien
Illustrationen von C. Vöst

Die Schüler lernen:

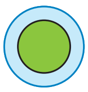
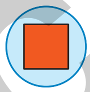
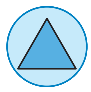
einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines Graphen zu ermitteln. Nach einem kurzen Theorieteil erläutert der Beitrag das Thema mit Beispielen anhand von ganzrationalen Funktionen, gebrochen-rationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und trigonometrische Funktionen. Um das erworbene Wissen zu testen, ist am Schluss des Beitrags eine Klassenarbeit mit Bewertungsschlüssel angefügt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt **LEK** = Lernerfolgskontrolle

Thema	Material	Methode
Theorie	M1	Ab
Aufgaben	M2	Ab
Klassenarbeit	M3	Ab, LEK

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil:

Inhalt: Nullstellen, Tangenten, Polstellen, Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte, Wendepunkte und Grenzwerte von ganzrationalen, gebrochen-rationalen und trigonometrischen Funktionen sowie Wurzel-, Logarithmus- und Exponentialfunktionen.

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Hinweise

Einsatzmöglichkeiten:

Der Beitrag ist entweder zum Selbststudium, als Hilfe zur Vorbereitung für eine Klassenarbeit oder als Grundlage für Sie, um sich in diesen Themenkomplex einzuarbeiten, gedacht.
Es werden alle relevanten Funktionstypen in zahlreichen Aufgaben behandelt, daher bietet der Beitrag einen guten Überblick über die Problematik „Funktionsterme bestimmen".

Am besten setzen Sie ihn dann im Unterricht ein, wenn Ihre Klasse bereits mit den Themen Differenzieren, Monotonie und Extremwerte sowie Wendepunkte und Wendetangenten vertraut sind. Einige Aufgaben können Sie aber auch bereits am Anfang der Oberstufe lösen lassen, da sie lediglich das Wissen aus den vorherigen Jahrgangsstufen wiederholen. Dazu gehören die Aufgaben 5a, 7a und 8, die auch mit dem Differenzierungsicon für einfache Aufgaben (vgl. Überblick) gekennzeichnet sind.
Des Weiteren bieten sich die Aufgaben in **M 2** auch als Hausaufgabe oder zum selbstständigen Üben an, besonders dann, wenn Sie die Lösungen den Lernenden gleichzeitig mit den Aufgaben zur Verfügung stellen. Ebenso denkbar ist eine Partner- oder Gruppenarbeit, bei der Sie leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler[1] mit leistungsschwächeren in Gruppen einteilen.
Das Material **M 3** ist als Lernerfolgskontrolle gedacht, es kann aber auch als weiteres Arbeitsblatt zum Üben verwendet werden. Mit der Lernerfolgskontrolle testen sich die Lernenden selbst oder auch Sie Ihre Klasse mithilfe des Bewertungsschlüssels.

Differenzierungsmöglichkeiten:

Geben Sie zur Differenzierung das Material **M 1** (Theorie) als Hilfe für leistungsschwächere Schüler zusätzlich zu den Aufgaben in **M 2** aus. Falls in Ihrer Klasse das Können und Wissen rund um das Thema Kurvendiskussion noch nicht gefestigt ist, wiederholen Sie nach Möglichkeit auch den Theorieteil vorher für alle Lernenden.
Neben jeder Aufgabe steht ein Differenzierungsicon, an dem Sie sich ebenfalls beim Einteilen der Aufgaben orientieren können.

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

M 1 Theorie

Sie müssen dem jeweiligen Aufgabentext entnehmen, welche Aussagen für die analytische Umsetzung relevant sind, um die beschriebene Funktion aufstellen zu können.

Typische Beispiele sind:

Der Graph besitzt…

- eine Nullstelle bei x_0 $\Leftrightarrow f(x_0) = 0$
- den Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ $\Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$
- eine waagrechte Tangente bei x_0 $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
- einen Hochpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0$
- einen Tiefpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0$
- einen Wendepunkt $P(x_0 \mid y_0)$ $\Leftrightarrow f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$
- einen Terrassenpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$
- eine Polstelle bei x_0 $\Leftrightarrow f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} \wedge N(x_0) = 0$
- senkrechtes Einmünden in die x-Achse des Graphen bei $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$

Merken Sie sich:

Bei einer Sinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ verändern die Parameter a, b, c und d den Graphen der Sinusfunktion wie folgt:

- a staucht oder streckt den Graphen in y-Richtung, spiegelt ihn an seinem Mittelwert (gedachte Mittellinie) bei negativem Vorzeichen
- b staucht oder streckt den Graphen in x-Richtung und beeinflusst daher die Periode P, es gilt $P = \frac{2\pi}{|b|}$
- c verschiebt den Graphen in x-Richtung (negatives c nach rechts, positives nach links)
- d verschiebt den Graphen in y-Richtung (negatives d nach unten, positives nach oben)

M 2 Aufgaben

1. Der gezeichnete Graph (eine Parabel) einer Funktion f hat Nullstellen bei $x=-2$ und $x=2$. Die Tangenten an den Graphen in den Nullstellen schneiden sich auf der y-Achse im Punkt $(0|3)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f.

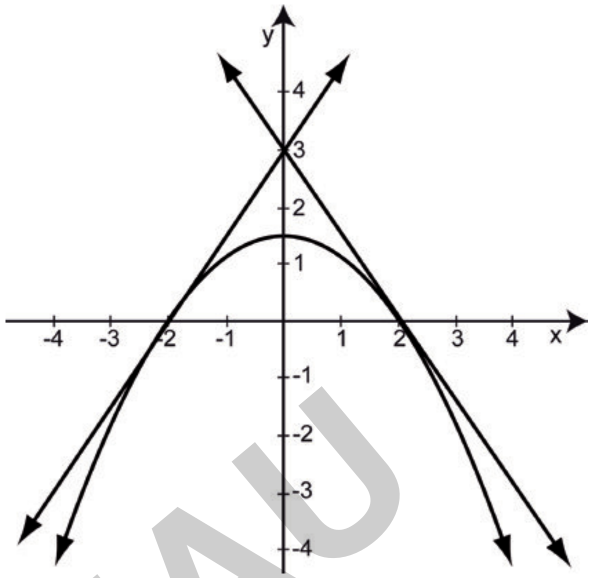


Abb. 1, Grafik: Carlo Vöst

2. Eine Parabel 3. Ordnung (d. h. der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades), hat seinen Tiefpunkt in $O(0|0)$ und in $W(2|3)$ einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die zugehörige Funktion.

3. Der Graph einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch und hat in $P(2|y_P)$ eine Wendetangente mit der Gleichung $4x+3y-8=0$. Ermitteln Sie die zugehörige Funktion.

4. Gesucht wird eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph folgende Bedingungen erfüllt: Extrempunkt $(0|0)$, Wendepunkt $W(2|3)$. Die Wendetangente ist parallel zur Geraden mit der Gleichung $y=2x$.

5. Gesucht ist eine Funktion der Form $f:\ x \mapsto \frac{ax^2}{x+c}$ mit $a \neq 0$.

   a) Bestimmen Sie a und c so, dass der Graph G_f bei $x=1$ eine Polstelle hat und durch den Punkt $P(2|-2)$ geht. Skizzieren Sie anschließend G_f.

   b) Welche Eigenschaften hat der Punkt P?
   Warum wird diese Eigenschaft in Aufgabe a) nicht als Bedingung vorgegeben? Skizzieren Sie zur Erklärung die Graphen für verschiedene Werte von a.