Stochastik

Was sagt das Ergebnis eines medizinischen Tests aus? – Fehlerwahrscheinlichkeiten

Prof. Dr. Andreas Pfeifer, Groß-Zimmern
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

© gilaxia/E+/Getty Images Plus

Ein Antikörpertest kann im Blut eines Menschen nachweisen, ob dieser bereits eine SARS-CoV-2-Infektion hatte oder nicht. Aber die Fehlerquote eines solchen Tests ist immer noch sehr hoch. Nun kommt per Eilzulassung ein Test auf den Markt, der fast 100-prozentige Sicherheit verspricht. Anhand dieses Beispiels setzen sich Ihre Schüler mit Fehlerwahrscheinlichkeiten bei medizinischen Tests auseinander.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11–13 (G9)
Dauer:	4–6 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Kommunizieren (K6)
Thematische Bereiche:	Bewertung von medizinischen Tests mithilfe von Wahrscheinlichkeiten, Sensitivität, Spezifität, Satz von Bayes, Konfidenzintervall, Prävalenz
Zusatzmaterialien:	Excel-Datei zur Überprüfung der Ergebnisse und Simulation neuer Konstellationen

Didaktisch-methodische Hinweise

Die Corona-Pandemie hat unseren Alltag grundlegend verändert. Viele Menschen fragen sich, wie verlässlich die Ergebnisse von medizinischen Tests sind, insbesondere wenn ihre Angehörigen einer Hochrisikogruppe angehören. Bundeskanzlerin Angela Merkel wurde mehrfach getestet. Ist ein zweiter oder dritter Test notwendig, weil Testergebnisse falsch sein können? Dieses aktuelle Praxisproblem bildet den Hintergrund des Beitrags. Mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler[1] verschiedene Fragestellungen und bereiten sich so in Einzelarbeit auf den Teil „Stochastik" in der **Abiturprüfung** vor. Mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms (**MS Excel**) können die Betrachtungen leicht auf andere Datensätze erweitert werden.

Sachanalyse

Bei Tests wird überprüft, ob ein bestimmter Zustand oder eine bestimmte Eigenschaft vorliegt oder nicht. Beispielsweise wird beim Test auf Viren (z. B. SARS-CoV-2, HIV) überprüft, ob die Person mit dem Virus infiziert ist oder nicht. Entsprechend wird bei einem Schwangerschaftstest geprüft, ob der entsprechende Zustand vorliegt oder nicht.

Kann man sich auf das Testergebnis verlassen? Bei einem Test ist unbedingt nötig, zu wissen, wie korrekt oder sicher der Test ist. Dazu werden bei diagnostischen medizinischen Tests üblicherweise zwei Wahrscheinlichkeiten angegeben: die **Sensitivität** und die **Spezifität**. Leider dienen diese beiden Wahrscheinlichkeiten häufig eher zur Verwirrung als zur Aufklärung. Eine dritte Zahl, die **Prävalenz**, die zur Beurteilung eines Testergebnisses notwendig ist, wird meist nicht genannt bzw. ist meist nicht genau bekannt oder erforscht. Mit dem Unterrichtsmaterial lernen Schüler, wie medizinische Tests in der Praxis zu beurteilen sind.

Die Sensitivität gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass bei infizierten Personen bei Anwendung eines Virentests der Virus auch erkannt wird, d. h., je höher die Sensitivität ist, desto eher wird mit dem Test der Virus bei erkrankten Personen auch erkannt.
Beispielsweise werden bei einem Test mit einer Sensitivität von 99 % auf einen bestimmten Virus – wie dies beim ersten Arbeitsblatt angegeben ist – von 100 mit dem Virus infizierten Personen im Durchschnitt 99 Personen als infiziert erkannt. Leider ist daraus **nicht** zu folgern – was aber oft getan wird –, dass bei Personen, bei denen der Test die Infektion feststellt, die Infektion auch zu 99 % vorliegt. Positiv getestete Personen können auch nur zu 10 % oder sogar weniger den Virus wirklich haben. Woran das liegt, wird in den folgenden Materialien erläutert. Die andere Wahrscheinlichkeit, die bei medizinischen Tests angegeben wird, ist die **Spezifität**. Das ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Test auf eine bestimmte Eigenschaft diese Eigenschaft nicht feststellt, wenn diese Eigenschaft in Wahrheit auch nicht vorliegt.

Beispiele für mögliche Werte von Sensitivität und Spezifität sind in der Tabelle auf der folgenden Seite dargestellt. Diese Angaben sind in der Regel im Beipackzettel der Tests zu finden. Manchmal wird auch ein **95 %-Konfidenzintervall** angegeben; darauf wird in den Arbeitsblättern nicht eingegangen. Ziel ist es zu erläutern, was überhaupt die Sensitivität und die Spezifität für die Beurteilung eines Testergebnisses bedeuten und wie wichtige Wahrscheinlichkeiten über die Zuverlässigkeit von medizinischen Tests ermittelt werden.

---

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

Test	Sensibilität	Spezifität
Coronavirus Antikörpertest Cerascreen SARS-CoV-2 Antikörper, [2]	97,4 %–100 %	98,9 %–99,2 %
HIV-Schnelltest autotest VIH, [5]	100 %	99,8 %
Test auf Brustkrebs, [6]	90 %	91 %
Influenza-Test BinaxNow, [1]	Influenza A: 70 %–89 % Influenza B: 50 %–69 %	Influenza A: 90 %–99 % Influenza B: 94 %–100 %

Quellen: vgl. Mediathek

Lernvoraussetzungen

Voraussetzungen für die sinnvolle Anwendung dieser vorliegenden Materialien sind

– elementare Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und
– die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit kann mit wenigen einfachen Erklärungen vermittelt werden, wie dies bei den Lösungen und didaktischen Hinweisen beschrieben ist.

Zusatzmaterial auf CD-ROM 79

Mithilfe der beigefügten Excel-Datei können die Schüler die angegebenen Ergebnisse nachvollziehen. Ebenso sind mit anderen Ausgangswerten neue Berechnungen leicht durchzuführen.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K1, K2, K3, K4	L1, L2, L5	… entnehmen relevante Informationen einem Text zu einem Anwendungsproblem und stellen diese formal dar (**M 1**).	II
K2, K4, K5	L5	… berechnen aus gegebenen Daten die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse (**M 2–M 4**),	II, III
K2, K5, K6	L1, L2, L5	… übertragen erworbene Kenntnisse auf ein weiteres Problem und lernen den sicheren Umgang mit den Formeln (**M 3**),	I – III
K5, K6	L2, L5	… lernen Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren und die Unsicherheit bzw. Genauigkeit zu begründen (**M 1** bis **M 4**).	II, III
K4, K5	L5	… lernen sicheren Umgang mit Formeln (**M 5**).	II, III

Bibliografische Angaben

- *[1] **Abbott Rapid Diagnostics Germany GmbH:** BinaxNow® Test.*
  https://www.alere.com/de/home/product-details/binaxnow-influenza-a-b.html
  (aufgerufen am 23.7.2020)
- *[2] **Cerascreen GmbH:** Coronavirus Antikörpertest.*
  https://www.cerascreen.de/products/coronavirus-antikoerper-test-ppc_d
  (aufgerufen am 23.7.2020)
- *[3] **European Centre for Disease Prevention and Control (ECDC):** COVID-19 situation update worldwide*
  https://www.ecdc.europa.eu/en/geographical-distribution-2019-ncov-cases
  (aufgerufen am 23.7.2020)
- *[4] **Gramm, Andreas u. a.:** Das große Tafelwerk interaktiv 2.0. Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II; Berlin: Cornelsen Verlag, 2011*
- *[5] **Ratiopharm:** autotest VIH®. www.autotest-sante.com (aufgerufen am 23.7.2020)*
- *[6] **Schirren, Clara; Lein, Ines; Diel, Franziska; Jenny, Miriam:** Zahlen können Verwirrung stiften. In: Deutsches Ärzteblatt, Jg., 110, 2019, A 1642 – A 1646*

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen
Ab = Arbeitsblatt, Wh = Wiederholungsblatt, Tk = Tippkarte

1. Stunde

Thema:	**Einführung**
M 1 (Ab)	**Covid-19 – Peter hat Angst (Einstieg)**
M 2 (Ab)	**Mögliche Ergebnisse medizinischer Tests**
Benötigt:	☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard ☐ PC mit Internetzugang

2.–6. Stunde

Thema:	**Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten bei medizinischen Tests**
M 3 (Ab)	**Was sagt ein positiver Virentest wirklich aus?** / Konkrete Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und grafische Darstellung der Ergebnisse in Abhängigkeit der Prävalenz (Vortestwahrscheinlichkeit)
M 4 (Wh)	**Test auf Brustkrebs – Übertragung auf anderen Kontext** / Transfer der mit **M 2** gewonnenen Kompetenzen auf einen anderen Kontext. Arbeitsblatt kann als Hausaufgabe bearbeitet werden.
M 5 (Ab)	**Absicherung eines Testergebnisses durch zweiten Test** / Wie kann die Zuverlässigkeit eines Tests erhöht werden?
M 6 (Ab)	**Tippkarte**
M 7 (Tk)	**Beweise** / Formel beweisen; Satz von Bayes anwenden
Benötigt:	☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard ☐ PC mit Internetzugang

Minimalplan
Von der Problemstellung her ist es sinnvoll, die Arbeitsblätter **M 1** bis **M 6** hintereinander zu bearbeiten.
M 1/M 2: ca. 1 Stunde, je nach Vorkenntnissen
M 3: ca. 2 Stunden
M 4 – M 7: jeweils ca. 1 Stunde

M 1 Covid-19 – Peter hat Angst (Einstieg)

© MyImages_Micha/iStock/ Getty Images Plus

Peter liest in der Tageszeitung: Über 100 000 Corona-Tote in den USA. Er möchte sich testen lassen. Seine Mutter erzählt von Angela Merkel, bei der auch ein zweiter Test durchgeführt wurde. Sie hat gehört, dass Virentests gar nicht so sicher sind. Es gebe viele Fehlurteile bei diesen Tests. Man fühlt sich dann sicher und ist es gar nicht. Der Vater ergänzt, dass in Südamerika die Todeszahlen noch höher sind.

Peter überlegt: Ein Test wäre vielleicht doch sinnvoll. Er müsste allerdings wissen, was ein Test wirklich aussagt. Kann er sich auf das Testergebnis verlassen? Und wo findet er Aussagen über die Zuverlässigkeit von Tests?

Das Problem: Tests sind nicht immer korrekt. Bei keinem medizinischen Test wird von den Herstellern angegeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Test ein korrektes Ergebnis liefert. Stattdessen werden zwei andere Wahrscheinlichkeiten aufgeführt. Peter beschließt deshalb, sich mit medizinischen Tests zu befassen.

Land	Bestätigte Coronafälle	Tote	Land	Bestätigte Coronafälle	Tote
Ägypten	89 078	4 399	Niederlande	52 073	6 136
Argentinien	130 761	2 373	Österreich	19 679	710
Australien	12 428	126	Pakistan	267 428	5 677
Belgien	64 258	9 805	Peru	362 087	13 579
Brasilien	2 159 654	81 487	Polen	40 782	1 636
Chile	334 683	8 677	Russland	783 328	12 580
China	85 771	4 648	Saudi-Arabien	255 825	2 557
Dänemark	13 302	611	Schweden	78 166	5 646
Deutschland	202 799	9 095	Schweiz	33 655	1 690
Frankreich	177 338	30 165	Spanien	266 194	28 424
GB	295 817	45 422	Südafrika	381 798	5 368
Indien	1 164 183	28 732	Süd-Korea	13 879	297
Japan	26 303	989	Tschechien	14 324	360
Kanada	111 684	8 862	Türkei	221 500	5 526
Mexiko	356 255	40 400	USA	3 902 058	142 066
			Gesamt	**14 890 516**	**616 317**

Quelle: European Centre for Disease Prevention and Control. Stand 22.7.2020

Aufgaben

Vergleichen Sie die Zahlen in der Tabelle. In welchen Ländern sind die Todeszahlen besonders hoch? Diskutieren Sie in Zweiergruppen die möglichen wirtschaftlichen und sozialen Auswirkungen des Lockdowns. Der Umgang der Regierungschefs mit der Corona-Pandemie ist ganz unterschiedlich. Woran könnte das liegen?

Mögliche Ergebnisse medizinischer Tests M 2

Bei medizinischen Tests gibt es vier mögliche Fälle, die in der folgenden Tabelle aufgeführt sind, denn Wahrheit und Testergebnis stimmen nicht immer überein:

© Tang Ming Tung/Getty Images Plus

Test / **Wahrheit**	Testergebnis positiv (T=+) = Test liefert, dass Person die zu testende Eigenschaft hat (z. B. mit Virus infiziert ist bei Test auf einen bestimmten Virus).	Testergebnis negativ (T=–) = Test liefert, dass Person die Eigenschaft <u>nicht</u> hat (z. B. <u>nicht</u> mit dem Virus infiziert ist).
Eigenschaft liegt in Wahrheit vor (W=+), d. h., Person hat in Wahrheit den Virus.	Testergebnis korrekt Bezeichnung: richtig-positiv (RP)	Testergebnis falsch Bezeichnung: falsch-negativ (FN)
Eigenschaft liegt in Wahrheit nicht vor (W=–), d. h., Person hat in Wahrheit den Virus nicht.	Testergebnis falsch Bezeichnung: falsch-positiv (FP)	Testergebnis korrekt Bezeichnung: richtig-negativ (RN)

Die Qualität eines medizinischen Tests wird durch zwei Kennzahlen beschrieben: durch die Sensitivität und durch die Spezifität. Die **Sensitivität (SENS)** ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Testen einer erkrankten Person die Erkrankung auch festgestellt wird. Die **Spezifität (SPEZ)** ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei <u>nicht</u> erkrankten Personen der Test auch negativ ausfällt. Je näher die beiden Wahrscheinlichkeiten bei 100 % liegen, desto besser ist der Test.
Hinweis: Eine Merkregel, wie Sie leicht Spezifität und Sensibilität unterscheiden können, ist im Glossar angegeben.

Die wichtigste Fragestellung: Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Testergebnis korrekt? Dies wird bei medizinischen Tests **nicht** angegeben. Das hat der Arzt oder die getestete Person (= Patient) selbst zu berechnen oder zu beurteilen. Wie das durchzuführen ist und von welchen Parametern diese Wahrscheinlichkeit abhängt, lernen Sie in den folgenden Arbeitsblättern kennen, um medizinische Tests besser beurteilen zu können.
Das Schlimme: Auch wenn die beiden obigen Wahrscheinlichkeiten nahezu bei 100 % liegen. können die Testergebnisse, wie im Arbeitsblatt **M 3** gezeigt wird, zu über 66 % und mehr falsch sein. Doch zunächst in **M 2** etwas Theorie. Ab Arbeitsblatt **M 3** geht es dann um praktische Rechnungen.

Aufgaben

10 000 Personen unterziehen sich einem speziellen Virentest, einem Test auf Influenza (Grippetest) oder einem Test auf SARS-CoV-2. Bei diesem Test gilt: Die Sensitivität beträgt 99 % und die Spezifität 98 %. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten, dass der Test korrekte Ergebnisse liefert.

© selimaksan/E+/Getty Images Plus

a) Was schätzen Sie, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person auch wirklich mit dem Virus infiziert ist?

( ) ≈ 99 %
( ) ≈ 98 %
( ) ≈ 97 %
( ) ≈ 90 %
( ) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann man aus den obigen Daten nicht er mitteln.

b) Tragen Sie zunächst in die sieben leeren Felder der unten stehenden Tabelle die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (d. h. die formale Bezeichnung) ein. Dabei bedeutet W die wahre Eigenschaft und T das Testergebnis. Beispielsweise bedeutet P(W = +) die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, die getestet wird, wirklich mit dem Virus infiziert ist.

	Testergebnis positiv (T = +) = Test ergibt: mit Virus infiziert	**Testergebnis negativ (T = –) = Test ergibt: kein Virus**	**Summe**
W=+ (in Wahrheit mit Virus infiziert)			
W=– (in Wahrheit nicht mit Virus infiziert)		P(T=– und W=–)	
Summe	P(T=+)		

c) Geben Sie die formale Bezeichnung für die Sensitivität an. SENS = P(_________ | _________).

d) Geben Sie die formale Bezeichnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, bei der der Test den Virus anzeigt, auch wirklich mit dem Virus infiziert ist.
Wahrscheinlichkeit: P(_________ | _________)
Geben Sie die formale Bezeichnung für die gesuchte Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person, bei der der Test den Virus nicht anzeigt, auch wirklich nicht mit dem Virus infiziert ist.
Wahrscheinlichkeit: P(_________ | _________)

e) Versuchen Sie – ohne größere Rechnung – eine Erklärung für Ihre Antwort in Aufgabenteil a) zu finden.

Was sagt ein positiver Virentest wirklich aus?

M 3

Um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass eine Person mit positivem Testergebnis wirklich mit dem Virus infiziert ist, wird neben der Sensibilität und der Spezifität noch eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit benötigt: die **Prävalenz (PRÄV)**.
Der Fachausdruck Prävalenz wird auch Basisrate oder Vortestwahrscheinlichkeit genannt. Es ist der Anteil der Eigenschaft oder Krankheit in der Bevölkerung. Eine Prävalenz von einem Prozent bedeutet, dass 1 % der Bevölkerung mit dem Virus infiziert ist, formal P(W = +) = 0,01. Von 100 Personen hat 1 Person den Virus in sich.

Mit der zusätzlichen Angabe der Prävalenz kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: Über Berechnungen der Personenanzahl mithilfe einer Tabelle oder direktes Ausrechnen mit einer Formel.

Aufgaben

10 000 Personen werden auf einen bestimmten Virus getestet. Für den Test gilt:
Sensitivität (SENS) = 99 %, Spezifität (SPEZ) = 98 %.
Die Sensibilität und die Spezifität sind also bei diesem Test sehr hoch. Die Prävalenz sei 1 %.

Begriffe im Glossar

a) Fertigen Sie nach dem Muster in **M 1** eine Tabelle. Tragen Sie jeweils die Anzahl der **erwarteten Fälle** ein. Berechnen Sie dann aus den Fallzahlen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Test auch wirklich mit dem Virus infiziert ist.
Mit den Werten der Tabelle ergibt sich P(W=+ | T=+) = .
Dies bedeutet:
Nur jede ( ) zweite Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.
( ) dritte Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.
( ) vierte Person mit positivem Testergebnis hat wirklich den Virus.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein negatives Testergebnis korrekt ist:
P(W = – | T = –) =

c) Mit den Ergebnissen von a) und b) kann der Virentest nun beurteilt werden. Wie ist das Testergebnis zu bewerten?

d) Alternativ können Sie die beiden gesuchten Wahrscheinlichkeiten, also die Zuverlässigkeit des medizinischen Tests, auch mit folgender Formel ermitteln:

$$P(W=+\ |\ T=+) = \frac{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}}{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}+(1-\text{SPEZ})\cdot(1-\text{PRÄV})},$$

$$P(W=-\ |\ T=-) = \frac{\text{SPEZ}\cdot(1-\text{PRÄV})}{\text{SPEZ}\cdot(1-\text{PRÄV})+(1-\text{SENS})\cdot\text{PRÄV}}.$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P(W=+ | T=+) bei einer Prävalenz von 10 % und auch von 25 % (statt bisher von 1 %) bei sonst gleichen Daten.

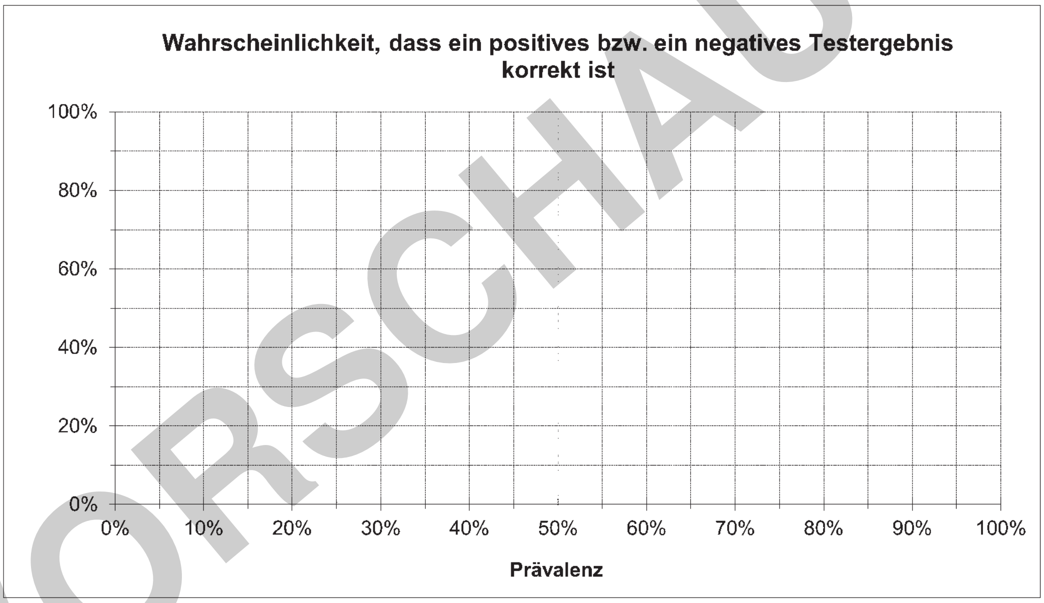
$$\text{PRÄV} = 0{,}10 \;\Rightarrow\; P\left(W=+ \mid T=+\right) =$$

$$\text{PRÄV} = 0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(W=+ \mid T=+\right) =$$

e) Wenn Sie die Wahrscheinlichkeit P(W=+ | T=+) bei einer Prävalenz von 1 %, 10 % und 25 % vergleichen, was fällt Ihnen auf?

f) Ergänzen Sie die folgende Wertetabelle und zeichnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten (Zuverlässigkeiten) in Abhängigkeit der Prävalenz in das Koordinatensystem.

Prävalenz	0,00	0,01	0,02	0,05	0,10	0,15	0,25	0,50	0,75	0,95	0,99	1,00
P(W=+ I T=+)												
P(W=– I T=–)												



Grafik: A. Pfeifer

g) Es ist möglich, zu verlässlicheren Testergebnissen zu kommen, ohne den eigentlichen Test zu verbessern. Was ist zu tun? Berücksichtigen Sie dabei die Ergebnisse in e).

Zusatzaufgabe

Nach Angaben des Herstellers hat ein neuer SARS-CoV-2-Antikörpertest eine Sensitivität von 100 % und eine Spezifität von 98,9 %.

a) Wie sicher sind die Ergebnisse dieses Tests bei einer Prävalenz von 1 %?

P(W=+ | T=+) = P(W=– | T=–) =

b) Wie groß sind beide Wahrscheinlichkeiten, wenn 4 % aller Testpersonen infiziert sind?

P(W=+ | T=+) = P(W=– | T=–) =

Test auf Brustkrebs – Übertragung auf anderen Kontext M 4

Die Daten des folgenden Beispiels stammen aus Schirren und andere (2019)[2]. Bei diesem Test auf Brustkrebs (Mammografie-Screening) bei Frauen wurde mit folgenden Werten gerechnet: Sensitivität = 90 %, Spezifität = 91 %, Prävalenz = 1 %. Es wurden 10 000 Frauen getestet.

Aufgaben

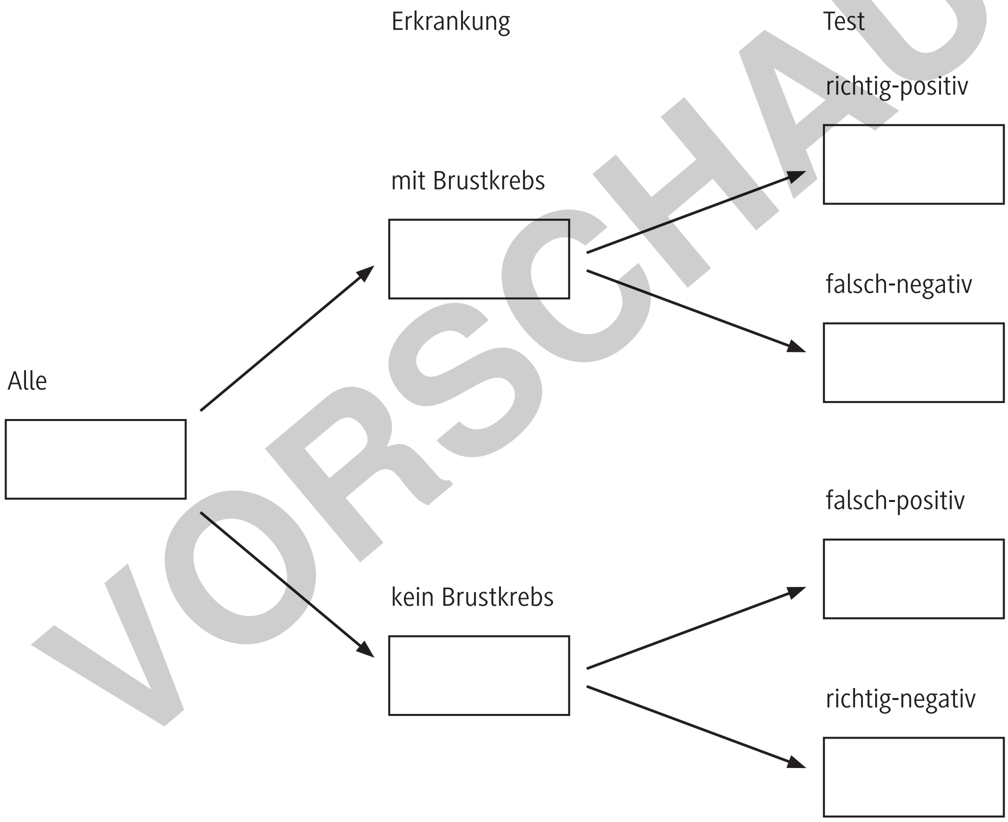
a) Berechnen Sie, wie viele Frauen zu erwarten sind, bei denen der Test Brustkrebs feststellt.

b) Bei wie vielen Frauen, die positiv getestet wurden, ist zu erwarten, dass sie jedoch keinen Brustkrebs haben?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Frau wirklich Brustkrebs hat?

d) Die Wahrscheinlich in c) ist recht klein. Was ist dazu aus statistischer Sicht zu folgern?

e) Die Lösungen der obigen Aufgaben können auch über ein **Baumdiagramm** ermittelt werden. Vervollständigen Sie die unten stehende Abbildung. Tragen Sie an die Pfeile die Wahrscheinlichkeiten und in die Kästchen die Fallzahlen ein.



I. Wenn 10 000 Frauen getestet wurden, wie viele Frauen sind zu erwarten, bei denen der Test Brustkrebs feststellt?

II. Bei wie vielen Frauen, die positiv getestet wurden, ist zu erwarten, dass sie jedoch keinen Brustkrebs haben?

III. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Frau wirklich Brustkrebs hat?

[2] *Schirren, Clara; Lein, Ines; Diel, Franziska; Jenny, Miriam: Zahlen können Verwirrung stiften. In: Deutsches Ärzteblatt, Jg., 110, 2019, A 1642 – A 1646*

M 5 Absicherung eines Testergebnisses durch zweiten Test

Im **M 4** wurde ein Test bei einer Sensitivität von 90 % einer Spezifität von 91 % und einer Prävalenz von 1 % durchgeführt. Die Untersuchung dieses Tests hat ergeben, dass im Durchschnitt nur 9,2 % aller positiven Testergebnisse korrekt waren. Deshalb ist es sinnvoll, alle positiv getesteten Personen zur Absicherung des Testergebnisses noch einmal zu testen. Dies soll mit einem zweiten Test **mit den gleichen Werten** für Sensitivität und Spezifität (**M 4**) erfolgen.

Aufgabe

a) Alle positiv getesteten Personen werden noch einmal getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiven zweiten Test Brustkrebs wirklich vorhanden ist? Fertigen Sie nach dem Muster in **M 2** eine Tabelle. Tragen Sie zur Berechnung die Anzahl der Personen in die entsprechenden Felder der Tabelle ein.

b) Welcher Wert hat sich beim zweiten Test geändert, dass jetzt die Wahrscheinlichkeiten eines korrekten Testergebnisses so groß werden?

c) Wenn sich beim zweiten Test ein negatives Testergebnis ergibt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis der Wahrheit entspricht?

d) Welche Voraussetzung muss für den zweiten Test vorliegen, damit die obigen Wahrscheinlichkeiten korrekt sind?

e) Beim zweiten Test wird für alle im ersten Test positiv getesteten Personen ein aufwendigeres, aber besseres Testverfahren T2b angewandt. Der neue Test hat eine Sensitivität von 99 % und eine Spezifität von 98 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiven zweiten Testergebnis Brustkrebs wirklich vorhanden ist. Fertigen Sie nach dem Muster in **M 2** eine Tabelle.

f) Wenn sich beim zweiten Test ein negatives Ergebnis ergibt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis der Wahrheit entspricht?

M 6 Tippkarte

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Falls die bedingte Wahrscheinlichkeit nicht bekannt ist, hier eine Definition:

P(A|B) bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Ereignis B eingetreten ist.

Beispiel: Beim Würfeln eines symmetrischen Würfels sei A das Ereignis „gerade Zahl" und B das Ereignis „keine 6 gewürfelt". Dann gilt: P(A) = 1/6 und P(B) = 5/6. $P(A \cap B)$, also die Wahrscheinlichkeit einer geraden Zahl, die keine 6 ist, beträgt 2/6. Die Wahrscheinlichkeit von „eine gerade Zahl ist gewürfelt unter der Bedingung, dass die Zahl keine 6 ist" wird als P(A|B) bezeichnet. Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit?

Wenn keine 6 gewürfelt wurde, bleiben nur fünf Möglichkeiten (nämlich 1, 2, 3, 4, und 5) übrig. Von den fünf Möglichkeiten sind die Zahlen 2 und 4 gerade, also P(A|B) = 2/5.

Es gibt zur Berechnung auch eine Rechenregel:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = (2/6)\ /\ (5/6) = 2/5.$$

Beweise

M 7

Merke:
Wie zuverlässig die Testergebnisse T = + und T = – sind, wird durch folgende Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt:

(1) $$P(W=+ \mid T=+) = \frac{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}}{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}+(1-\text{SPEZ})\cdot(1-\text{PRÄV})}$$

und

(2) $$P(W=- \mid T=-) = \frac{\text{SPEZ}\cdot(1-\text{PRÄV})}{\text{SPEZ}\cdot(1-\text{PRÄV})+(1-\text{SENS})\cdot\text{PRÄV}}$$

Aufgabe 1
Beweisen Sie die Formel (2).

Hinweis 1: Bei zwei Ereignissen A und B gilt:
$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B})$.

Hinweis 2: Für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B eingetreten ist, gilt:
$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Hinweis 3:
$$P(W=+ \mid T=+) = \frac{P(W=+,T=+)}{P(T=+)} = \frac{P(T=+,W=+)}{P(T=+)} =$$
$$\frac{P(T=+\mid W=+)\cdot P(W=+)}{P(T=+)} = \frac{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}}{P(T=+,W=+)+P(T=+,W=-)}$$
$$= \frac{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}}{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}+P(T=+\mid W=-)\cdot P(W=-)} = \frac{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}}{\text{SENS}\cdot\text{PRÄV}+(1-\text{SPEZ})\cdot(1-\text{PRÄV})}$$

Aufgabe 2
Hinter beiden obigen Formeln steckt der **Satz von Bayes**.
Er lautet:
Unter der Voraussetzung, dass für die Ereignisse B_1 und B_2 die Bedingungen $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ und $B_1 \cup B_2 = \Omega$ gelten, folgt
$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)}{P(A\mid B_1)\cdot P(B_1)+P(A\mid B_2)\cdot P(B_2)}.$$
Wie müssen die Ereignisse A, B_1 und B_2 gewählt werden, dass aus dem Satz von Bayes direkt obige Aussage (2) folgt?