Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

© *baibaz/iStock/Getty Images Plus*

Nehmen wir einmal an, die Eiskugeln schmelzen. Dann ist die kegelförmige Eistüte mit Wasser gefüllt. Oder konkreter: Was passiert mit dem Wasserspiegel, wenn man die Inkugel aus einem auf der Spitze stehenden, vollständig mit Wasser gefüllten Kegel entfernt? Versucht man dieses oder ähnliche Probleme zu lösen, sind verschiedene Teilgebiete der Mathematik hilfreich. So können beispielsweise Kenntnisse aus elementarer Geometrie, analytischer Geometrie oder der Analysis hier vernetzt werden.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © baibaz/iStock/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zappe, Ilmenau
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Oberstufe (Niveau)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau
Illustrationen von Dr. W. Zappe, Ilmenau

Die Schüler lernen:

– Mathematische Modelle für ein reales Problem aufzustellen,
– überschaubare mehrschrittige Argumentationen und logische Schlüsse zu entwickeln,
– Strategien zur Lösung eines komplexeren Problems anzuwenden,
– verschiedene Lösungswege zu beurteilen,
– digitale Mathematikwerkzeuge auszuwählen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Informationen und Modellierung	M 1	Ab
Aufgaben	M 2	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Über Kegel, die eine Kugel enthalten

Einstieg:

Konfrontieren Sie Ihre Schülerinnen und Schüler[1] mit folgendem Problem (Lehrervortrag mit Demonstrationsexperiment):

In einem vollständig mit Wasser gefüllten Kegel mit der Höhe h = 10,0 cm und dem Grundkreisradius s = 5,0 cm liegt eine Kugel. Die Kugel ist so beschaffen, dass sie den Kegelmantel und auch die Wasseroberfläche berührt.

Wie hoch steht das Wasser im Kegel, wenn man die Kugel entfernt?

Geben Sie zunächst einen Schätzwert an.

Sammeln Sie Ideen für eine rechnerische Lösung dieses Problems.

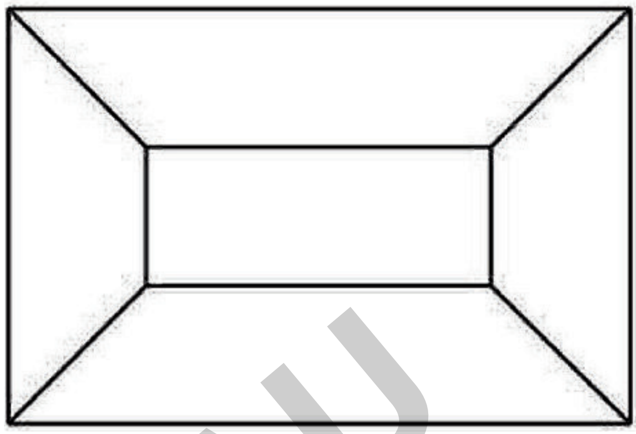
© Dr. Wilfried Zappe

Methodische Hinweise:

Die Materialien für eine reale Veranschaulichung sind rasch zu beschaffen. Ein solches Modell eines Hohlkegels wird sich vermutlich in fast jeder Sammlung mathematischer Lehrmittel der Schule finden. Wenn sich keine passende Kugel in der Sammlung befindet, können Styroporkugeln (Durchmesser 6 cm) in einem Bastel- oder Schreibwarengeschäft oder über das Internet erworben werden. Lassen Sie Ihre Schüler zunächst Schätzungen vornehmen, ehe Sie die Kugel wirklich herausnehmen. Die Schätzungen können ein brauchbares Material ergeben, um einige Eigenschaften der **beschreibenden Statistik** zu wiederholen (Mittelwerte, Standardabweichung).

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

In der Phase der Ideensammlung kann die Methode der „Platzdeckchen“ hilfreich sein. Die Klasse/der Kurs teilt sich dafür in Vierergruppen auf.


© Dr. Wilfried Zappe

Jede Gruppe erhält ein DIN-A3-Blatt, das in vier äußere Felder und einen zentralen Bereich eingeteilt ist.
Jedes Gruppenmitglied notiert zunächst in Stillarbeit in seinem äußeren Feld seine eigenen Ideen. Danach wird das Blatt gedreht, sodass jeder die Notizen der anderen Gruppenmitglieder lesen kann.
Schließlich einigt man sich in der Gruppe auf die Ideen, die man für besonders „fruchtbar“ hält, und trägt sie in das mittlere Feld ein.
Im Anschluss werden die Ideensammlungen der Gruppen verglichen und zu einer „Bearbeitungsstrategie“ zusammengefasst.

Das weitere Vorgehen hängt u. a. davon ab, welche Ergebnisse die Phase der Ideensammlung gebracht hat. Es ist beispielsweise denkbar, jeden Schüler individuell mit der Lösungsfindung zu betrauen, eventuell gestützt durch eine Auswahl von Aufgaben aus der nachfolgend aufgeführten Aufgabensammlung. Die Bearbeitung des Problems kann aber auch in Partner- oder weiterer Gruppenarbeit oder durch ein gezieltes Lehrer-Schüler-Gespräch erfolgen.
Welche der Aufgaben ausgewählt werden, das hängt von der Jahrgangsstufe und auch von den zur Verfügung stehenden digitalen Mathematikwerkzeugen sowie der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit ab.

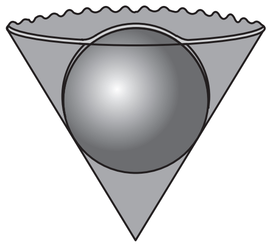
Hinweis: Einige Aufgaben sollen mithilfe von Software gelöst werden. Dafür bieten sich die kostenlosen Online-Versionen von GeoGebra an (kein Download und keine Anmeldung notwendig und auch auf dem Smartphone verwendbar):

- *CAS-Rechner:* https://www.geogebra.org/cas
- *DGS:* https://www.geogebra.org/classic

Die CAS-Rechnungen und DGS-Bilder im Beitrag wurden zum Teil mit TI-Nspire erstellt.

M 1 Ideen zur mathematischen Modellierung

Der Sachverhalt ist gegeben als ein auf der Spitze stehender gerader Kreiskegel mit der Höhe h und dem Grundkreisradius s mit seiner Inkugel, die einen Radius r hat.



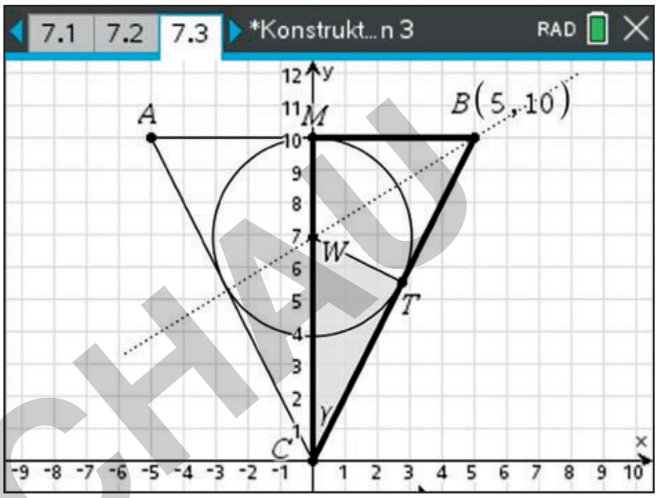
© Dr. Wilfried Zappe

Nützlich zur Veranschaulichung ist ein Achsenschnitt, der ggf. in ein kartesisches Koordinatensystem gelegt wird.

Im Achsenschnitt ergibt das Modell ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Inkreis.

Der Radius des Inkreises steht senkrecht zu den Dreiecksseiten.

Radius und Berührpunkt lassen sich mithilfe der Analysis bestimmen:



© Dr. Wilfried Zappe

Die Gerade g_{BC} ist Tangente am Kreis k. Für g_{BC} und den Kreis k lassen sich Funktionsgleichungen angeben. Im Punkt T, dem Berührpunkt von g und k, müssen die Funktionswerte und die Anstiege übereinstimmen. Der Punkt T liegt auf dem unteren, zu k gehörenden Halbkreis. Wenn die Kugel aus dem Kegel entfernt wird, dann bleibt ein Restvolumen, das sich aus der Differenz der Volumina von Kegel und Kugel ergibt.

Die Volumina von Kegel und Kegel lassen sich durch bekannte Formeln berechnen.

Das Restvolumen hat die Form eines zum gegebenen Kegel ähnlichen Kegels.

Da man das Restvolumen kennt, kann daraus die Höhe des Wasserstandes berechnet werden.