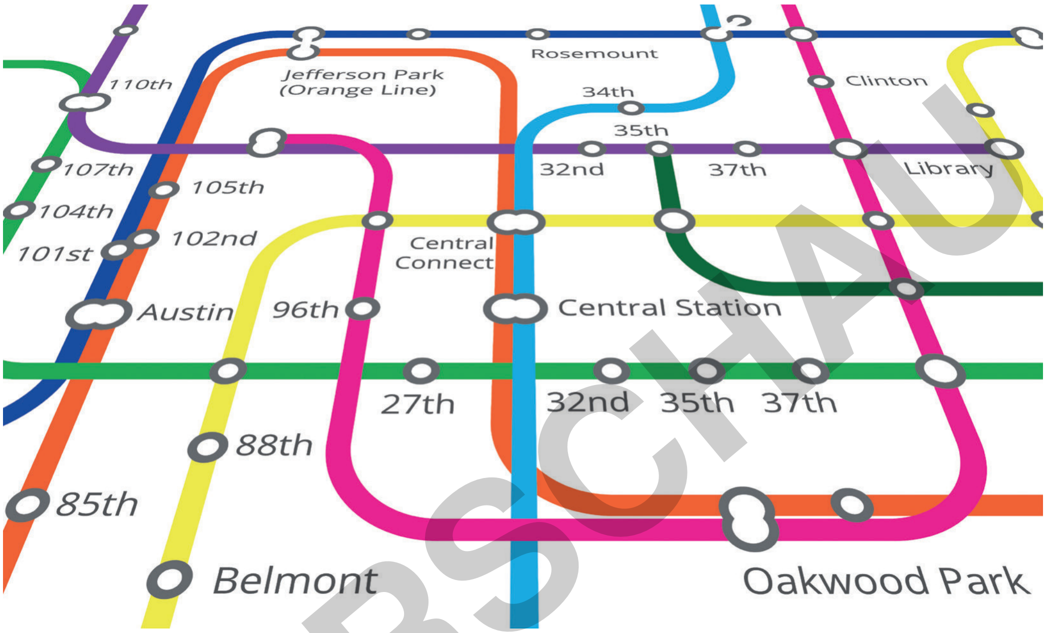
II.B.21

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Streckenmessung, Streckennetze und Navigation in Streckennetzen (Bsp.: Straßenverkehr)

Dr. Jürgen Bohla, Wuppertal
Illustrationen (Graphen) von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



Das vorliegende Konzept steht unter dem Leitgedanken „Planung, Messung und Verknüpfung von Strecken und Routenplanung in Streckennetzen". Straßenkarten (und digitale Dateien für die GPS-gesteuerte Navigation) dienen zur Orientierung im Alltag. Die Methoden der analytischen Geometrie (und Graphentheorie) ermöglichen eine analytische Untersuchung dieser Thematik.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12 (G8), 11–13 (G9)
Dauer:	6–8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)
Thematische Bereiche:	Mathematik, Geografie, Verkehrslehre, Physik
Medien:	Texte, 1 Farbfolie, Bilder
Zusatzmaterialien:	Anhang, Excel-Datei auf CD-ROM 79

Didaktisch-methodische Hinweise

Das Verkehrssystem ist Träger der Transport- und Beförderungsleistungen in einem Lebensraum. Ein wesentlicher Teil dieses Systems ist das Straßennetz. Leitgedanken dieses Beitrages ist die „**Planung, Messung und Verknüpfung von Strecken und Routenplanung in Streckennetzen**". Straßenkarten (und **digitale Dateien** für die GPS-gesteuerte Navigation) als zur Verfügung stehende Abbildungen von Strecken und Streckennetzen dienen der **Orientierung im Alltag**.

Fachübergreifendes Unterrichten

Für die Lösung komplexer Aufgabenstellungen dieser Art ist die Zusammenarbeit verschiedener Fachdisziplinen nötig. Die Mathematik stellt Wissen, Methoden und das Formelinstrumentarium zur Verfügung. Die fachmathematischen Methoden dafür werden aus der **analytischen Geometrie**, der **Graphentheorie** und der **Kombinatorik** entnommen. Den Schülerinnen und Schülern[1] gibt dies Gelegenheit zu umfangreichen Wiederholungen. Teilweise muss der Blick erweitert werden, wenn neue Erfahrungsbereiche erschlossen werden sollen. Wo es von der Thematik geboten ist, werden **fächerübergreifende Bezüge** zu **Geografie, Physik und Informatik** hergestellt.

Eigenverantwortliches Arbeiten

Als methodisches Prinzip wird Schülerselbsttätigkeit in verschiedenen Formen angestrebt. Dies ist im Wesentlichen **Einzelarbeit**. Die Arbeitsunterlagen dieses Konzepts wurden unter dem Gesichtspunkt erstellt, Vorwissen, Lernbereitschaft und Leistungsfähigkeit des Schülers nicht zu überfordern. Der Unterrichtende fasst die Ergebnisse zusammen und bietet Hilfestellungen bei Verständnisproblemen an. In einer Zeit, da algorithmenbasierte technische Assistenzsysteme bis hin zum selbststeuernden Auto das Leben immer mehr unterstützen und manuelle Tätigkeiten ersetzen, ist ein Grundverständnis für diese Zusammenhänge und Techniken unerlässlich.
Inhaltlich und methodisch eignet sich das Konzept für den regulären Unterricht, für **Projekte** und **Arbeitsgemeinschaften** zum Thema „**Mathematik und Anwendungen**" und auch für **Referate,** um Bezüge zu modernen Entwicklungen auf mathematischer Grundlage zu vermitteln.

Lehrplanbezug

„Die Mathematik erfasst Aspekte der Wirklichkeit und erarbeitet Begriffe, Theorien, Strukturen und Modelle. […] Sie liefert als dynamische Wissenschaft wesentliche Beiträge zur Beschreibung und Gestaltung unserer Welt" (siehe z. B. Lehrplan Gymnasium Bayern Kl. 11/12, Mathematik[2]). Die zu erwerbenden Kompetenzen umfassen einerseits Sachwissen, andererseits Methodenwissen, d. h. Kenntnisse, einen Sachverhalt oder eine Aufgabe der Lösung zuzuführen.
Die vorliegenden Aufgaben von der Streckenmessung bis zur Routenplanung erfüllen die Anforderungen an ein komplexes, realitätsbezogenes Unterrichtskonzept. Dafür sind adäquate Realitätsabbilder, d. h. **Modelle,** zu entwickeln. Für die Lösung werden analytische und heuristisch-experimentelle Methoden benötigt. Die anzuwendenden Methoden sind an diesen Modellen zu erproben. Wenn geeignete Methoden noch unbekannt sind, sind diese ebenfalls im Zuge des Lernprozesses zu entwickeln, wie z. B. bei den Grundzügen der **Graphentheorie**. Der Lernprozess ergibt sich aus dem Zusammenspiel beider Verfahrensweisen.

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

[2] *http://www.gym8-lehrplan.bayern.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/id_26378.html*

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Mathematik dient als Werkzeug für **Problemlösungen**, den **Erwerb heuristischer Fähigkeiten** und als **Mittel zur Modellierung komplexer Realsituationen**.

Der in den länderspezifischen Lehrplänen enthaltene Pflichtbereich der analytischen Geometrie wird hier in einem anwendungsorientierten Kontext wiederholt.

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K1–K6	L1, L3, L4	… führen Sachverhalte auf mathematische Konzepte zurück,	II, III
K1–K6	L1, L3, L4	… erkennen dabei Zusammenhänge,	II, III
K3, K6	L1, K3, L4	… interpretieren und reflektieren die Ergebnisse.	III

Ziele des Beitrags:

Die einzelnen Teile des Beitrags sind schwerpunktmäßig auf bestimmte Lernziele ausgerichtet.

1. Bei der Streckenmessung steht die Anwendung und Wiederholung bekannten Wissens aus analytischer Geometrie und Analysis im Mittelpunkt.
2. Im zweiten Teil soll – auf diesen Ergebnissen basierend – durch Abstraktion von realen Gegebenheiten ein **Modell** für Planungszwecke bei der Streckenvernetzung entwickelt werden. Dazu ist es notwendig, die Schüler mit den Grundzügen der Graphentheorie vertraut zu machen, die in vielen Fällen Neuland sein wird. Hier wird gezeigt, wie **mathematische Modellierung für eine Problemlösung** erfolgen kann.
3. Schließlich soll vermittelt werden, nach welchen Grundsätzen die **optimale Bewegung** (Bezug zur **Optimierungstheorie**) in Strecken- bzw. Verkehrssystemen geplant werden kann.

Glossar

UTM-Gitter Das UTM-System ist ein globales Koordinatensystem. Es teilt die Erdoberfläche streifenförmig in 6° breite vertikale Zonen auf, die einzeln mit der jeweils günstigsten transversalen Mercator-Projektion verebnet und mit einem kartesischen Koordinatensystem überzogen werden.

GPS-Navigation GPS ist die Abkürzung für Global Positioning System, zu Deutsch: Globales Positionsbestimmungssystem.

Interpolationspolynom In der numerischen Mathematik versteht man unter Polynominterpolation die Suche nach einem Polynom, welches exakt durch vorgegebene Punkte verläuft. Dieses Polynom wird Interpolationspolynom genannt.

Tachymeter Tachymeter sind Arbeitsmittel für Landvermesser, Bauingenieure.

Tafelbilder

Themen der Unterrichtsstunden (Stoffverteilungsplan)

a) Streckenmessung (Verfahren und Anwendungen)
b) Streckennetze (Darstellung und Aufbau)
c) Navigation/Routenplanung in Streckennetzen

Tafelbild (M 1/M 2)

Zur Vorbereitung sollten Sie vorab folgenden Begriff klären: Betrag bzw. Länge eines Vektors:

Den Betrag des Vektors $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ berechnet man mit der Formel $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Der Betrag gibt anschaulich die Länge des Vektors an.

Kleinstreckenvermessung a) und b):

a) Berechnung der „**Euklidischen Distanz**" s im

$\mathbb{R}^2 : s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$,

$\mathbb{R}^3 : s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Streckenzug S als Summe der Einzelstrecken: $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \sum_i s_i, \quad i = 1, 2, .., n.$

Gekrümmte Strecken können mithilfe von **Interpolationspolynomen** berechnet werden.

b) Trigonometrische Strecken-, Winkel-, Höhenmessung mit dem Tachymeter:
Bekannter Punkt im $\mathbb{R}^2 : (x_A \mid y_A)$, gesuchter Punkt $(x \mid y)$, α = Winkel bzgl. x-Achse.
Bestimmung der Punktkoordinaten:
$(x \mid y) = (x_A + \Delta x \mid y_A + \Delta y) = (x_A + \cos\alpha \cdot s \mid y_A + \sin\alpha \cdot s)$.
Höhenkoordinate $h = s' \cdot \sin\beta$ (über Höhenwinkel β und Schrägstrecke s').

c) Globale Vermessung: mit Satellitensystemen wie dem GPS.
Die Distanzmessung $s = c_0 \cdot t$ erfolgt über die Messung der benötigten Zeit t der Funksignale zwischen zwei Punkten und die Umrechnung der Zeit t in Strecke s mithilfe der konstanten Lichtgeschwindigkeit c_0 (im Vakuum: $c_0 = 299\ 792{,}5\ \text{km/sec}$). Besondere Einflüsse (z. B. Nebel, Regen, Hagel, Glas, allgemein: Materialdichte) sind zu berücksichtigen.

Tafelbild (M 3/M 4)

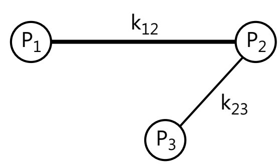
Grundbegriffe der Graphentheorie:

– Knoten P_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ repräsentieren Orte oder Punkte.
– Kanten k_i, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ sind die Verbindungen zwischen den Knoten und Punkten.

Komplexität eines zusammenhängenden Graphen mit $n \geq 1$ **Knoten:**

Beispiel eines Graphen mit n = 3 Knoten und k = 2 Kanten:

– minimale Kantenzahl: $n - 1$:
– maximale Kantenzahl: $\frac{1}{2} n \cdot (n-1)$:
– Entfernungsmatrix D: n x n -Matrix der Entfernungen d_{ij} zwischen benachbarten Knoten i und j
($d_{ij} = \infty$ bei nicht benachbarten Knoten, $d_{ij} = 0$ bei Knoten i).



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Tafelbild (M 6)

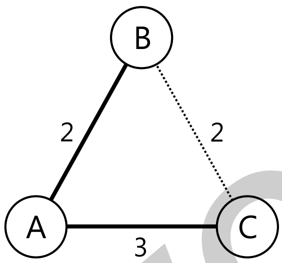
Routenplanung: mit ungerichtetem, zusammenhängenden, kantenbewerteten Graph.
Optimalitätsbedingung: kürzester Weg L vom Startknoten A zum Zielknoten B:
$L = \sum_{i,j} l_{ij} \rightarrow \min$, mit l_{ij} = Kantenlänge vom Knoten i zum Knoten j

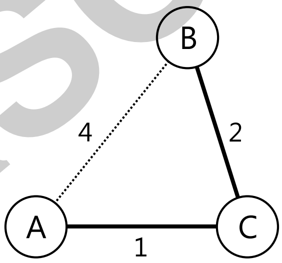
Grundsätze für die Entwicklung eines Algorithmus
(nach Edsger W. Dijkstra, 1930–2002, niederländischer Mathematiker)

1. Der Algorithmus basiert auf der Idee, von Stufe zu Stufe den nächstgelegenen Knoten, d. h. den Knoten mit der kürzesten Distanz zum zuvor gefundenen Knoten (= Vorgänger), zu ermitteln. Die Summe der kürzesten Einzelstrecken ergibt die kürzeste Gesamtstrecke.
2. Dafür sucht man auf Stufe t = 0 vom Startpunkt A aus den Knoten A+1 mit der kürzesten Distanz zu A und erhält damit den Knoten A + 1 auf Stufe t + 1. Die Kantenlänge von A nach A + 1 wird aufgeschrieben und bei den Knoten einer Stufe gespeichert (z. B dem Knoten vorangestellt).
3. Der Vorgang unter 2. wird iterativ von Stufe t zu Stufe t + 1 wiederholt. Bereits bearbeitete („besuchte") Knoten werden nicht mehr in die Berechnung einbezogen. Die bisher ermittelten Distanzen und die Gesamtdistanz werden nicht mehr geändert.
4. Die Distanzen zu den übrigen Knoten werden überprüft und dann geändert, wenn sie sich als kürzer erweisen, um der Minimum-Bedingung kürzester Weg (s. o.) zu genügen.
5. Diese Rechnung wird bis zum Ziel B fortgesetzt. Die Summe der optimalen Teilstrecken ergibt die optimale Gesamtstrecke.

Zur Illustration zwei einfache Graphen, für die L = min (A nach B) nach Augenschein ermittelt und in einer Tabelle nach diesen Grundsätzen beschrieben wird:

Graph 1 und Graph 2





Grafik: Dr. W. Zettlmeier

$L_1 = \overline{AB} = 2$ und $L_2 = \overline{ACB} = 1 + 2 = 3$

Vorgänger	A	B	C
A	0,A	2,A	3,A
B	–	**2**,A	–

Vorgänger	A	B	C
A	0,A	4,A	1,A
C	–	4,A	1,A
B	–	**3**,C	

Graph 1: Wegen 2,A + 3,A=5,A > 2,A bleibt $\overline{AB}$ = 2 LE die minimale Gesamtstrecke.

Graph 2:
$\overline{AB} = 4$ LE, $\overline{AC} = 1$ LE, $\overline{CB} = 2$
$\overline{ACB}$ = 1,A + 2,C = 3,B < 4,A
$\overline{ACB}$ ist jetzt die minimale Gesamtstrecke (optimale Route).

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt, Fo = Folie

1./2. Stunde

Thema:	**Streckenmessung und -berechnung (Verfahren und Anwendungen)**
M 1 (Ab)	**Streckenberechnung im Koordinatensystem**
M 2 (Ab)	**Streckenmessung mit technischen Hilfsmitteln /** Kleinvermessung, Landvermessung, Tachymetrie
M 3 (Ab)	**Streckenberechnung mit GPS[3] /** Globalvermessung, GPS
Hausaufgabe:	Übung und Vertiefung des Gelernten

3./4. Stunde

Thema:	**Die Abbildung von Streckennetzen mithilfe von Graphen**
M 4 (Ab)	**Grundbegriffe der Graphentheorie /** Definition der Begriffe Knoten, Kante, Kantenzug, Entfernungsmatrix
M 5 (Ab)	**Abbildung von Streckennetzen mithilfe von Graphen /** Umfang und Komplexität von Graphen, Knotenzahl und Kantenzahl (minimal, maximal), Graphentheorie und Streckennetze (Beispiel), Streckennetz und Entfernungsmatrix
M 6 (Fo)	**Graphenanalyse anhand eines Fallbeispiels**
Benötigt:	☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard

5. /6. Stunde

Thema:	**Voraussetzungen für die Navigation**
M 7 (Ab)	**Routenplanung/Modellierung eines Navigationssystems /** Voraussetzungen für den Aufbau; konzeptionelle Vorbedingungen; Entwicklung eines Planungsverfahrens/Algorithmus: Routenplanung, Formulierung einer optimalen Vorgehensweise, Formulierung eines Lösungskonzepts, Beispiele zur Routenplanung
Hausaufgabe:	Übung und Vertiefung des Gelernten
Benötigt:	☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard

[3] Die Abkürzung „GPS“ steht für „Global Positioning System“.

Streckenberechnung im Koordinatensystem M 1

Aufgabe 1: Streckenberechnung im Koordinatensystem

Das kartesische Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ist das **metrische Bezugssystem** für die Verortung von Punkten und die Beschreibung ihrer Beziehungen. Wir beziehen uns auf den I. Quadranten bzw. I. Oktanten eines Koordinatensystems, in dem $1\,\text{cm} = 10\ \text{km}$ entspricht (Maßstab 1 : 100 000).

a) Für die Punkte A – E wurden folgende Koordinaten in der Ebene ermittelt:
   A(1 | 1), B(3 | 5), C(5 | 2), D(7 | 8), E(9 | 9).
   Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem und verbinden Sie die Punkte durch einen Strecken- bzw. Polygonzug.
   Berechnen Sie aus den Koordinaten die Strecken $\overline{AE}$ („Luftlinie") und die Einzelstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ als „euklidische Distanzen" sowie die Gesamtstrecke $\overline{AB} + \ldots + \overline{DE}$.
   Wie groß ist der Unterschied zwischen Luftlinie und Streckensumme in km und %?

b) Die Strecke verläuft über einen Höhenzug mit den dreidimensionalen Koordinaten
   A(1 | 1 | 1), B(3 | 5 | 4), C(5 | 2 | 6), D(7 | 8 | 3), E(9 | 9 | 1).
   Berechnen Sie die Einzelstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ sowie die Gesamtstrecke $\overline{AB} + \ldots + \overline{DE}$.

c) Streckenberechnung bei Kurven (Rektifikation) mit bekanntem Funktionsterm:
   Angenommen, die Strecke A – C im Falle a) verläuft gekrümmt.
   Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 2. Grades durch die Punkte A(1 | 1), B(3 | 5), C(5 | 2) als Interpolationskurve, berechnen Sie deren Länge und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Streckensumme $\overline{AB} + \overline{BC}$.

Aufgabe 2 (Hausaufgabe)

Jede Messung birgt Ungenauigkeitsrisiken: z. B. Ablesefehler, ungenaue Peilung, Sichtbeeinträchtigungen. Die 5-malige Messung einer Strecke ergab folgende Werte:
80,91 m; 80,94 m; 80,90 m; 80,92 m; 80,91 m.
Welcher Wert kommt dem tatsächlichen Wert am nächsten?

Aufgabe 3 (Hausaufgabe)

Auch für die eigene Verkehrsplanung ist die Gleichung $s = v \cdot t$ hilfreich.
Ein Fahrzeug bewegt an einem Tag gemäß der Tabelle:

Ø v (km/h)	**t(h)**	**s_i**
30	0,5	
70	2,5	
50	1,75	
120	1,5	
	$t = \sum_i t_i =$	$s = \sum_i s_i =$

a) Welche Einzelstrecken s_i und welche Gesamtstrecke s werden zurückgelegt?
b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit v durchfährt das Fahrzeug die Gesamtstrecke?

M 2 Streckenmessung mit technischen Hilfsmitteln

Die technische Durchführung der Vermessung kann auf herkömmliche Weise mit Maßband, Messlatte und Winkelmesser/Theodolit erfolgen. Heute wird diese Methode kaum noch angewendet. Das moderne Hilfsmittel für die „Kleinvermessung" (bis 10 km) ist der elektronische Tachymeter.

Aufgabe 1

Von Punkt A(2|1) aus soll ein Straßenzug angelegt werden. Die vermessenen Streckenabschnitte und Winkel (entgegen dem Uhrzeigersinn, x-Achse = 0°) betrugen:

Punkt	Strecke in km	Winkel	Koordinaten
A			A(2|1)
	$\overline{AB} = 2$	45°	
B			
	$\overline{BC} = 3$	315°	
C			
	$\overline{CD} = 4{,}5$	30°	
D			
	$\overline{DE} = 3{,}4$	150°	
E			

Zeichnen Sie den Streckenzug/Polygonzug ($1\text{ cm} \mathrel{\hat{=}} 1\text{ km}$) und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B, C, D, E.

Aufgabe 2

Ein Tachymeter wird auch zur trigonometrischen Höhenmessung eingesetzt. Die Vermessung einer Berglandschaft vom Standort S mit den Koordinaten S(0,1 | 0,5 | 0,2) km über NN aus zum Zielpunkt „Gipfel G" hat folgende Ergebnisse geliefert:

Höhenwinkel: 30°, Schrägstrecke $s' = \overline{SG} = 1800\text{ m}$.

Der Gipfel befindet sich 30° in Richtung Nordwest. Zeichnen Sie die Draufsicht in der x_1x_2 – Ebene und berechnen Sie die Koordinaten des Gipfelpunktes.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe)

Die Lichtgeschwindigkeit ist mit $c_0 = 299\,792{,}5\text{ km/s}$ eine Naturkonstante. Dies gilt aber nur im Vakuum. In der Realität beeinträchtigen Luftschichtdichte, Temperatur, Nebel, Stoffdichte (Wasser, Glas) die Geschwindigkeit des durchdringenden Lichtstrahls. Solche Einflüsse werden mit dem Brechungsindex n berücksichtigt, sodass als tatsächliche Lichtgeschwindigkeit $c = c_0 / n$ anzusetzen ist.

Mit welchem Wert c (km / s) müssen technische Systeme rechnen, wenn für den Brechungsindex im Medium Luft $n = 1{,}000292$ anzusetzen ist?

Streckenberechnung mit GPS

M 3

Streckenberechnung mit GPS (Global Positioning System)

Globale und lokale Vermessung und Navigation werden auf Satellitensysteme wie das GPS (Global Positioning System, siehe **Anhang 2** auf CD-ROM 79) gestützt. Sie dienen auch der Erstellung sog. digitaler Karten, die zur Landvermessung, Positionsbestimmung und Navigation/Routenplanung eingesetzt werden. Der Informationsaustausch erfolgt bei diesen Systemen über Funksignale mit Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\ 792{,}5\ \text{km/s}$.

© Peter Dazeley/The Image Bank, Getty Images Plus

Folgende Aufgabe soll zum Verständnis dieser Technik beitragen.

Hinweis:

Lösen Sie diese Aufgaben ggf. mithilfe einer Skizze.

Aufgabe

a) Ein Satellit S befindet sich in 20 000 km Höhe senkrecht über Kontrollpunkt A auf der Erde. Wie lange braucht ein Funksignal von A zum Satelliten und von dort zurück?

b) Auf welchem Kreis um Punkt A befindet sich ein Punkt B, dessen Signal hin und zurück 0,134759875 s benötigt?
Die Erdkrümmung kann <u>nicht</u> vernachlässigt werden.

c) Die Signalwellen von S breiten sich kugelförmig aus und bilden da, wo die Funkwellen den Globus (Kugelgestalt vorausgesetzt) streifen, einen „Tangentialkegel" T über dem Globus. Welchen Durchmesser hat der Tangentialkegel und welcher Teil der Erdoberfläche in km^2 und % wird von T „bestrichen"?
Der Erdradius beträgt gerundet 6371 km. Der Satellit steht senkrecht über der Erde.

M 4

Grundbegriffe der Graphentheorie

Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein **Graph** besteht aus (mehreren) **Knoten** P_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ und **Kanten** k_i, $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Hinweis:

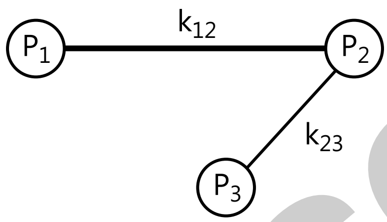
Die Knoten P_i werden auch als *Knotenpunkte* oder *Ecken* bezeichnet. Man nennt die Menge der Knoten auch die Menge der *Elemente erster Art*.

Die Knoten können Landschaftselemente, z. B. Ortschaften, Kreuzungen, Türme, Seen, markante Punkte etc., repräsentieren.

Kanten k_i sind die Verbindungen zwischen den Knoten: z. B verbindet die Kante $k_{12} = \overline{P_1P_2}$ die Knoten P_1 und P_2 miteinander. Die Kanten repräsentieren in der Realität z. B. Straßen, Leitungen, Flüsse, Kanäle, Schienen etc. Sie ergeben die Menge der *Elemente zweiter Art*. Gilt: $\overline{P_iP_{i+1}} = \overline{P_{i+1}P_i}$, d. h., die Richtung der Kante spielt keine Rolle, dann liegt ein sog. *ungerichteter* Graph vor. Ein Graph wird durch seine Beziehungen zwischen Knoten und Kanten beschrieben.

Wir betrachten nur ungerichtete Graphen.

Ein einfaches Beispiel für einen ungerichteten Graphen mit $n = 3$ Knoten und $k = 2$ Kanten ist hier abgebildet.



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Graphenanalyse anhand eines Fallbeispiels

Auf der Farbfolie **M 6** sehen Sie einen Kartenausschnitt aus Mittelhessen mit 8 Knoten und den Entfernungen zwischen einzelnen Knoten. (Quelle: ADAC-Straßenatlas 2008/09, S. 117). Dieser Kartenausschnitt wird in einen Graphen transformiert. An seinem Beispiel erarbeiten Sie sich wichtige **Grundbegriffe** zur Analyse und Auswertung von Graphen:

- **Kantenzug:** eine Folge zusammenhängender Kanten, bei der jede Kante über Knoten mit anderen Kanten verbunden ist. Ein Kantenzug hat einen **Anfangs-** und einen **Endknoten**. Gilt: Anfangsknoten = Endknoten, so bildet der Kantenzug einen „Kreis".
- **Kantenbewertung:** wenn eine Kante mit einem Merkmal, in der Regel mit der **Kantenlänge** „bewertet" oder „gewichtet" wird.
- **Weg:** Kantenzug, in dem jeder Knoten höchstens einmal vorkommt.
- **Gerüst:** zusammenhängender **Untergraph** von G. Ein Graph, der alle Knoten enthält, kann zugleich ein Gerüst sein. Ein Gerüst minimaler Gesamtkantenlänge ist ein **Minimalgerüst**.
- **Entfernungsmatrix:** Matrix, in der die Entfernungen zwischen den Knoten (Kantenlängen) als Matrix abgebildet werden.

Abbildung von Streckennetzen mithilfe von Graphen M 5

Aufgabe 1

Die Komplexität eines Graphen hängt wesentlich von der Anzahl der Knoten und den zwischen ihnen möglichen Kanten ab. Um ein Maß für die mögliche Komplexität eines Graphen zu erhalten, berechnen Sie für $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$, $n = 10$ und $n = 20$

a) die minimale Kantenzahl m für einen zusammenhängenden Graphen, in dem jeder Knoten genau einmal erreicht werden soll, und

b) die maximale Kantenzahl m für einen zusammenhängenden Graphen, wenn jeder Knoten mit jedem Knoten verbunden sein soll.

c) Geben Sie für a) und b) die **Formeln zur Kantenberechnung** an.

Graphenanalyse anhand eines Fallbeispiels

Sie sehen auf der Farbfolie **M 6** einen Kartenausschnitt aus Mittelhessen (Quelle: ADAC-Straßenatlas 2008/09, S. 117). Dieser Kartenausschnitt wird in einen Graphen transformiert. Die alphabetische Kennzeichnung der Knoten = Orte: A, B, …. und die Auflistung ihrer Entfernungen (= Kanten) werden in einer Tabelle erfasst. (Bei großen Graphen werden die Knoten P_{ij}, $i, j = 1,2,\dots n$ übersichtlicher mit durchgezählt.)

Entfernung (in km, ADAC-Bundesstraßen)

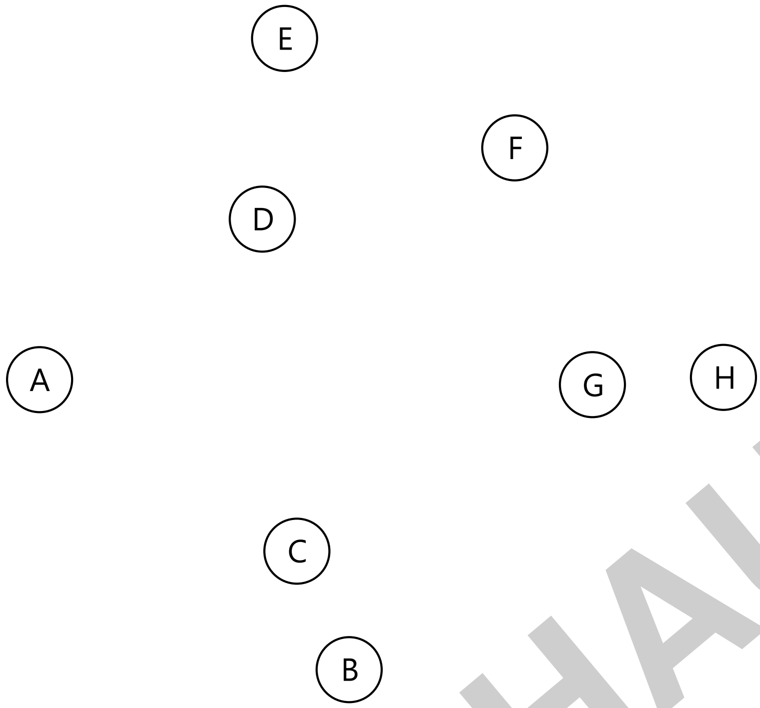
Von:	Nach:	Entfernung
A Cölbe	B	16 km
A	D	13 km
B Amöneburg	C	3 km
C Kirchhain	D	11 km
C	G	30 km
D Halsdorf	E	8 km
D	F	10 km
E Gemünden/Wohra	F	11 km
F Gilserberg	G	10 km
G Schwalmstadt	H	6 km
H Niedergrenzebach		

Hinweis:

Darstellung der n = 8 Knoten A,…,H als ungerichteter Graph (der Graph ist keine maßstäbliche Ähnlichkeitsabbildung wie eine Karte, da im Graphen keine Höhenwege, Serpentinen, Kurven … erscheinen!).

Aufgabe 2

Folgende Knotendarstellung ist Arbeitsgrundlage (nicht maßstäblich):



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

a) Zeichnen Sie folgende längenbewerteten Kanten ein: $\overline{AD}$, $\overline{CG}$, $\overline{EF}$.

b) Zeichnen Sie folgende Wege ein und berechnen Sie ihre Länge: $\overline{ADEF}$, $\overline{BCGFE}$.

c) Welche Art von Weg liegt bei $\overline{DCGFD}$ vor?

d) Zeichnen Sie:

 i) den vollständigen Graphen,

 ii) ein Gerüst,

 iii) das Minimalgerüst.

3. Ermitteln Sie die Entfernungsmatrix zum Graphen G.

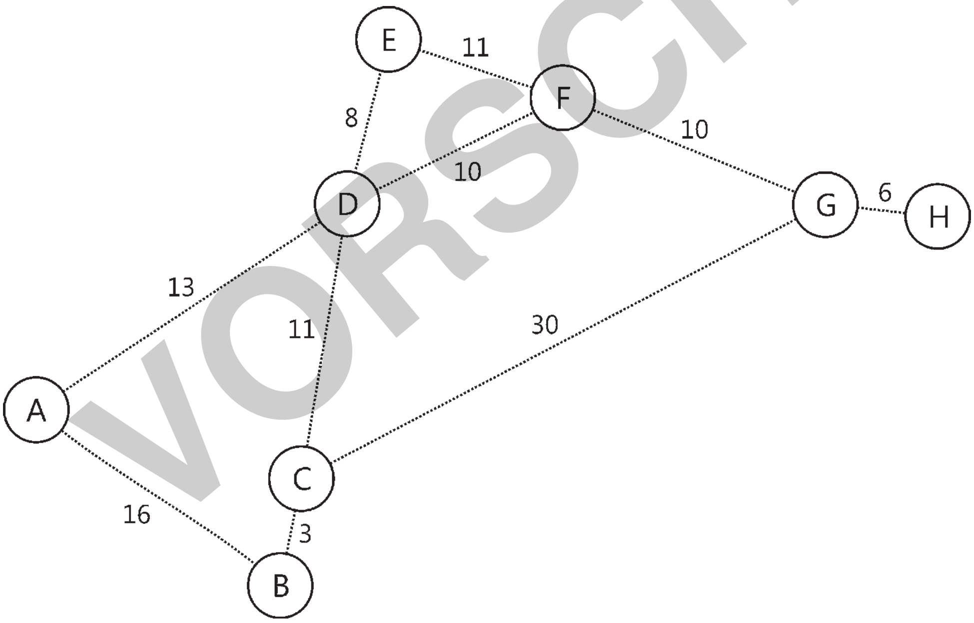
Hinweis:

Eine **Entfernungsmatrix** D hat folgende Eigenschaften:

- D ist eine <u>symmetrische</u> n x n-Matrix.
- Alle Elemente der Hauptdiagonale sind gleich 0: $d_{ij} = 0$.
- Für die übrigen Kantenbewertungen (= Kantenlängen) gilt:
  $d_{ij} \neq 0$: Kantenlänge zwischen Knoten i und Knoten j, d. h., Knoten i und Knoten j sind benachbart (adjazent).
  $d_{ij} = \infty$: Kantenlänge symbolisch ∞, wenn zwischen Knoten i und Knoten j <u>keine</u> Verbindung besteht. (Diese Darstellung ist bei der Routenplanung vorteilhaft.)
- D ist durch den Graphen G bis auf die Reihenfolge der Zeilen und Spalten <u>eindeutig</u> bestimmt. Diese Matrix ist eine Grundlage für die Entwicklung von computergestützten Lösungen für Graphen und Routenplanungen.

Graphenanalyse anhand eines Fallbeispiels **M 6**

Ausschnitt aus: Der Große_ADAC AutoAtlas 2009/10, S. 162. © MairDumont, Ostfildern.



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

M 7 Routenplanung/Modellierung eines Navigationssystems

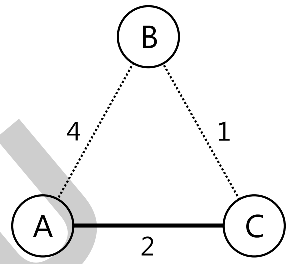
Aufgabe 1

Städte, Berge, Flüsse, Straßen sind das reale Umfeld, in dem sich eine Person oder ein Fahrzeug bewegt. Technische Hilfsmittel erleichtern die Bewegung. Digitale Karten oder Karten in Papierform sind Abbildungen der Landschaft zur Feststellung der eigenen Position. Für die Bewegungsplanung wird die Kartenlandschaft auf jene Elemente reduziert, die für die Planung unverzichtbar sind.

a) Die Graphentheorie arbeitet mit Knoten(punkten) und Kanten als Planungselementen. Welche Art von Graph eignet sich für die Modellierung einer Routenplanung?

b) Welcher Zielsetzung unterliegt die Planung der <u>optimalen</u> Route im Allgemeinen?

c) Um das Modell der optimalen Routenplanung zu verstehen, setzen wir uns gründlich mit einer einfachen Aufgabenstellung auseinander, um die gewonnenen Erkenntnisse dann auf gleichartige Fragestellungen zu übertragen. Gegeben ist folgender einfache Graph, bei dem der optimale Weg von A nach B zu ermitteln ist:



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

i) Um die Knoten zu verfolgen, die sukzessive die optimale Route bilden, legen Sie zunächst eine Tabelle an, in der in der ersten Zeile die Knoten des Graphs aufgeführt sind. Die erste Spalte wird dann nach und nach ergänzt, je nach Fortschritt bei der Ermittlung der optimalen Route.

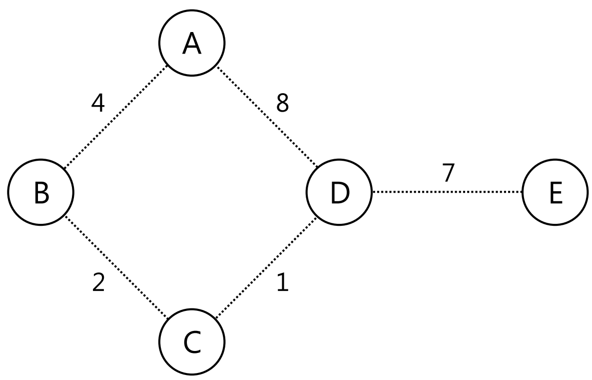
Vorgänger	**A**	**B**	**C**
A	0;A	4,A	2,A

ii) Von Knoten zu Knoten werden wiederholt in die Tabellenfelder nun Daten aus dem Graph nach folgender Regel aufgenommen: der jeweils nächstgelegene Knoten und die Gesamtstrecke (Summe der Teilstrecken /Kantenlängen) bis dahin. Die Gesamtstrecke wird bei dem Knoten einer Stufe gespeichert (z. B. dem Knoten vorangestellt: 7,B). Bereits bearbeitete („besuchte") Knoten oder Knoten ohne Bezug zum aktuellen Knoten bleiben unberücksichtigt. In der letzten Zeile steht das optimale Ergebnis.

Aufgabe 2

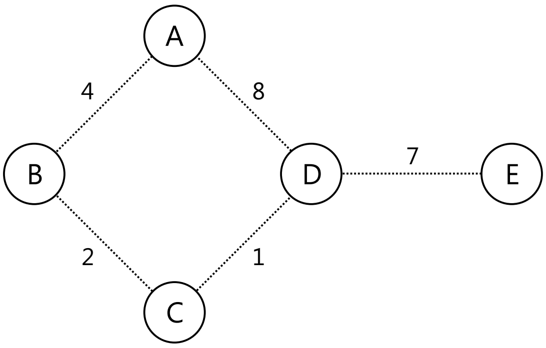
Entwickeln Sie zur Bestimmung des kürzesten Verbindungsweges zweier Knoten ein systematisches Lösungskonzept, das auf Graphen dieser Art angewendet werden kann. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

a) Ermitteln Sie die kürzesten Wege A nach E in folgenden Graphen:



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

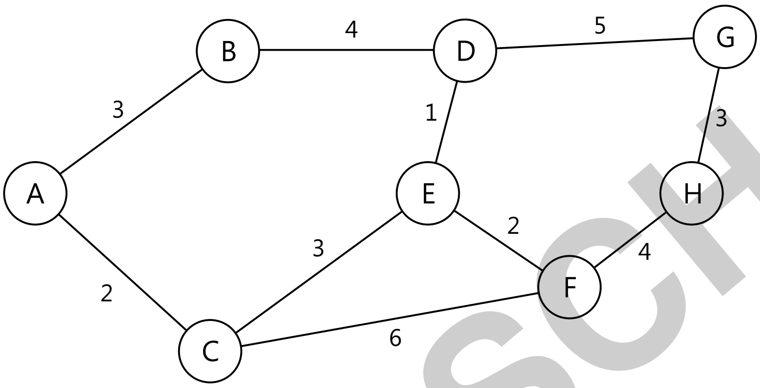
b) Änderung: Sei $\overline{BC} = 3$ und $\overline{CD} = 4$.



Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Aufgabe 3

Gegeben ist der ungerichtete, zusammenhängende Graph:



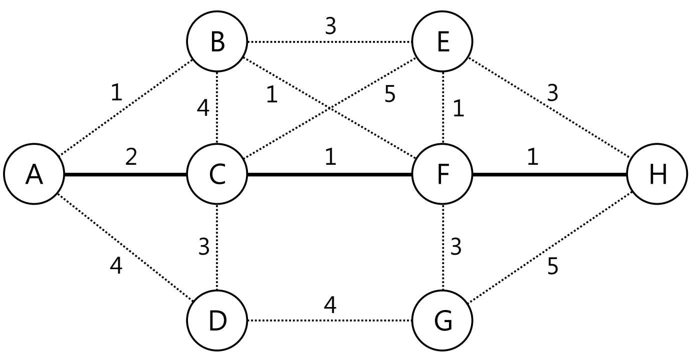
Grafik: Dr. W. Zettlmeier

a) Bestimmen Sie den kürzesten Weg L von Start A zum Ziel H.

b) Berechnen Sie die kürzesten (optimalen) Routen L für
   i) Start B, Ziel F, ii) Start H, Ziel B.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie zu diesem kantenbewerteten Graphen:
Gesamtkantenlänge, Entfernungsmatrix D, ein Minimalgerüst und dessen Gesamtkantenlänge:



Grafik: Dr. W. Zettlmeier