Zwei sich berührende Quadrate

von Dr. Wilfried Zappe

© *Colourbox*

Obwohl sich die Quadrate nur an einem Punkt berühren, entstehen geheimnisvolle Zusammenhänge. Die Geometrie überrascht immer wieder mit ihrer eigenen Schönheit und lässt Staunen. Schritt für Schritt lösen die Lernenden die Rätsel rund um die Eigenschaften von zwei sich berührenden Quadraten, mit den Werkzeugen der Algebra, analytischen Geometrie oder auch mithilfe von CAS.

Zwei sich berührende Quadrate

von Dr. Wilfried Zappe

Kompetenzprofil:

Inhalt: Quadrate, Nachweisstrategie, Gleichungssysteme, Geradengleichungen, Satz des Pythagoras

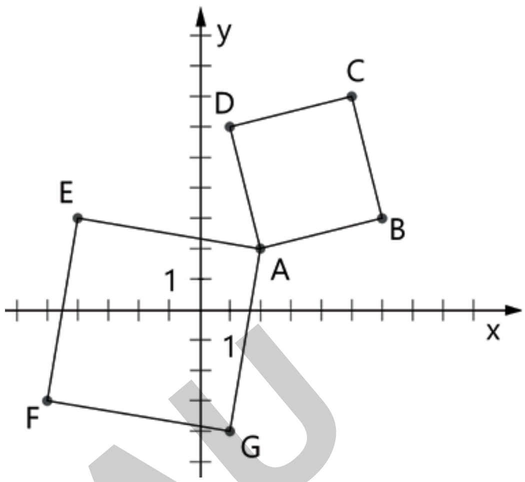
Medien: Taschenrechner, CAS-Rechner

Kompetenzen: mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Wiederholung

Übungsaufgaben mit ausführlicher Lösung:

1. Gegeben sind zwei sich an einer Ecke berührende Vierecke ABCD und AEFG.
   Alle Eckpunkte haben ganzzahlige Koordinaten.



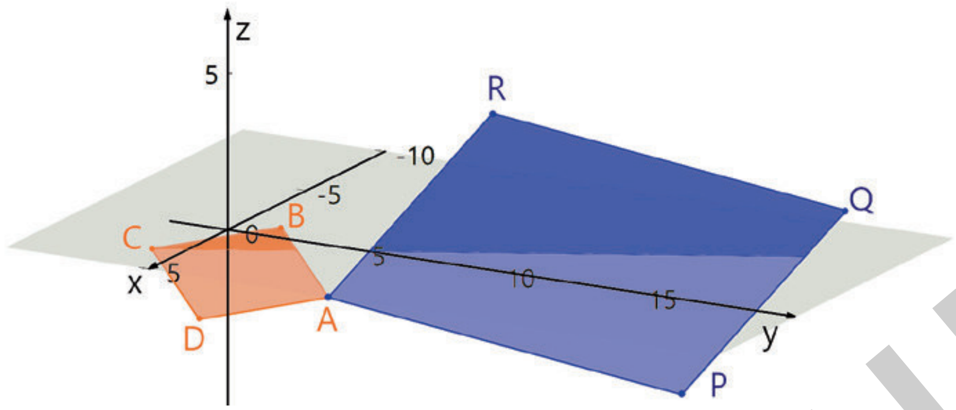
   a) Lesen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der beiden Vierecke ab und geben Sie diese an.
   b) Beurteilen Sie, ob die folgende Beschreibung geeignet ist, um nachzuweisen, dass diese Vierecke sogar Quadrate sind.

Ida:	„Mit dem Satz des Pythagoras kann ich die Seitenlängen der Vierecke berechnen. Wenn die Seitenlängen für jedes Viereck gleich sind, dann ist jedes Viereck ein Quadrat."
Trung:	„Nein, das reicht noch nicht. Du musst außerdem auch nachweisen, dass jeder Innenwinkel in den Vierecken eine Größe von 90° hat."
Mila:	„Ja, Trung hat im Prinzip recht, aber eigentlich müsste es doch reichen, wenn man für jedes Viereck nur für genau einen Winkel überprüft, ob er ein rechter Winkel ist."

   c) Zeigen Sie, dass jedes der Vierecke ABCD und AEFG ein Quadrat ist.
   d) Begründen Sie, dass $M\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{9}{2}\right)$ der Mittelpunkt der Strecke [ED] ist.
   e) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte A und M verläuft.
   f) Überprüfen Sie, ob es stimmt, dass auf der Geraden g sowohl die Seitenhalbierende s_A des Dreiecks ADE als auch die Höhe h_A des Dreiecks AGB liegt.
   g) Ermitteln Sie Gleichungen der Geraden durch die Punkte E und B, D und G sowie F und C. Zeigen Sie, dass sich diese drei Geraden in ein und demselben Punkt schneiden und berechnen Sie dessen Koordinaten.

Zwei sich berührende Quadrate im Raum

Gegeben sind die Punkte A(–1|3|–2), B(2|3|1), C(3|–1|0) und D(0|–1|–3).



1. Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B, C und D ein Quadrat bilden.
2. Zeigen Sie, dass die Punkte
   P(–9|11|–6) und Q(–5|19|2) in derselben Ebene wie das Quadrat ABCD liegen.
3. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AP}$ und $\overrightarrow{PQ}$ gleich lang und orthogonal zueinander sind.
4. Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes R, sodass auch die Punkte APQR ein Quadrat bilden.
5. Begründen Sie, dass auf der Geraden g_1 durch den Punkt A und den Mittelpunkt M_1 der Strecke [BR] sowohl eine Seitenhalbierende des Dreiecks ARB als auch die Höhe h_A des Dreiecks ADP liegen.
6. Vergleichen Sie die Flächeninhalte der Dreieck ARB und ADP.
7. Weisen Sie nach, dass die Mittelpunkte der Seiten [BR] und [DP] sowie die Mittelpunkte der beiden Quadrate ABCD sowie APQR ebenfalls ein Quadrat bilden.
8. Überprüfen Sie folgende Behauptungen bezüglich der Strecken [BP], [DR] und [CQ]:
   – Die Strecken haben genau einen Punkt gemeinsam.
   – Zwei der Strecken haben die gleiche Länge.
   – Zwei der Strecken sind orthogonal zueinander.

Hilfsmittel: CAS