Integration spezieller und zusammengesetzter Funktionen

von Dr. Jürgen Leitz

© Imgorthand/E+/Getty Images

In diesem Beitrag lernen die Schüler zunächst verkettete Funktionen und damit auch die Kettenregel der Differenzialrechnung neu kennen. Anschließend wiederholen sie zum Einstieg in die Integralrechnung Integrale von elementaren Funktionen. Danach erarbeiten sich die Lernenden durch zielgerichtete Aufgaben Integrationsformeln für spezielle (zusammengesetzte) Funktionen. Diese Formeln, sowie die partielle Integration wenden sie schließlich an komplexeren Integralen an. Als Hilfestellung dazu enthält der Beitrag eine kleine Formelsammlung spezieller Integrationen sowie Beschreibungen von bewährten Methoden der partiellen Integration.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Irene Dick
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Imgorthand/E+/Getty Images
Illustrationen: Oliver Wetterauer
Korrektorat: Mona Hitzenauer

Zur Wiederholung:

1. Verkettung von Funktionen

Verkettung von Funktionen

Zwei Funktionen f und g können durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zu einer neuen Funktion zusammengesetzt werden.
Des Weiteren gibt es neben diesen Verknüpfungen noch die Verkettung von Funktionen (auch Komposition oder Hintereinanderausführung genannt).
Bekannt ist eine solche Verkettung zweier Funktionen im Zusammenhang mit der Kettenregel und hierbei ebenso die Begriffe äußere und innere Funktion.

Definition:
Gegeben seien die beiden Funktionen f und g. Für die Verkettung dieser beiden Funktionen wird eine besondere Schreibweise verwendet:

$$\mathbf{f(g(x)) = (f \circ g)(x)}$$

(gelesen: f „von" g von x, f „verkettet mit" g von x)
$f \circ g$ heißt die Verkettung von f mit g, wobei die Funktion g als innere Funktion und die Funktion f als äußere Funktion bezeichnet wird.

Voraussetzung einer solchen Verkettung ist, dass die Wertemenge von g eine Teilmenge der Definitionsmenge von f ist.
„$\circ$" ist das Zeichen für die Operation der Verknüpfung.
Die verketteten Funktionen werden von rechts nach links bzw. von innen nach außen „ausgewertet".

Bemerkung: Die Reihenfolge der Verkettung ist wichtig, da im Allgemeinen die Kommutativität nicht gilt: $f \circ g \neq g \circ f$ (siehe Beispiel 1).

Beispiel 1:

Mit $f(x) = 7 \cdot x$ und $g(x) = x + 2$

$\Rightarrow \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7 \cdot (x+2) = 7 \cdot x + 14$

$\Rightarrow \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 7 \cdot x + 2$

also $f \circ g \neq g \circ f$

Beispiel 2:

Mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 2$

$\Rightarrow \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+2)^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$

$\Rightarrow \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 2$

Beispiel 3:

Mit $f(x) = \sin x$ und $g(x) = e^x$

$\Rightarrow \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(e^x)$

$\Rightarrow \ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{\sin x}$

Beispiel 4:

Äußere und innere Funktion in $(f \circ g)(x) = e^{3 \cdot x + 2}$ bestimmen:

z. B.: äußere Funktion: $f(x) = e^x$

z. B.: innere Funktion: $g(x) = 3 \cdot x + 2$

Beispiel 5:

Wie lauten äußere und innere Funktion in $(f \circ g)(x) = \sqrt{3 \cdot x + 5}$?

äußere Funktion: $f(x) = \sqrt{x}$ innere Funktion: $g(x) = 3 \cdot x + 5$.

Hinweis: Die Lösung ist nicht eindeutig, es gibt mehrere Möglichkeiten der Verkettung, z. B. auch: äußere Funktion: $f(x) = \sqrt{x + 5}$

innere Funktion: $g(x) = 3 \cdot x$.

Aufgaben zur Verkettung von Funktionen

1. Bestimmen Sie für folgende Funktionen f und g jeweils den Funktionsterm der Verkettung

a)	$f(x) = x^2$	und	$g(x) = 2 \cdot x + 3$
b)	$f(x) = \sin x$	und	$g(x) = 3 \cdot x + 1$
c)	$f(x) = e^x$	und	$g(x) = 2 \cdot x^2 - 1$
d)	$f(x) = x^2$	und	$g(x) = \cos x$
e)	$f(x) = \sqrt{3 \cdot x + 1}$	und	$g(x) = 2 \cdot x^2 + 3$
f)	$f(x) = \frac{1}{x}$	und	$g(x) = x^2 + 3$
g)	$f(x) = x^2$	und	$g(x) = e^x$
h)	$f(x) = 3 \cdot x + 4$	und	$g(x) = x^2$

2. Geben Sie für folgende verkettete Funktionen jeweils eine möglich äußere und innere Funktion an.

a) $(f \circ g)(x) = (2 \cdot x - 3)^3$

b) $(f \circ g)(x) = 2 \cdot \sin(5 \cdot x)$

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4}$

d) $(f \circ g)(x) = \frac{3}{5 \cdot x - 3}$

e) $(f \circ g)(x) = e^{x^2 - 3}$

f) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$

g) $(f \circ g)(x) = 5 \cdot x^2 - 3$

h) $(f \circ g)(x) = e^{2 \cdot x + 2}$