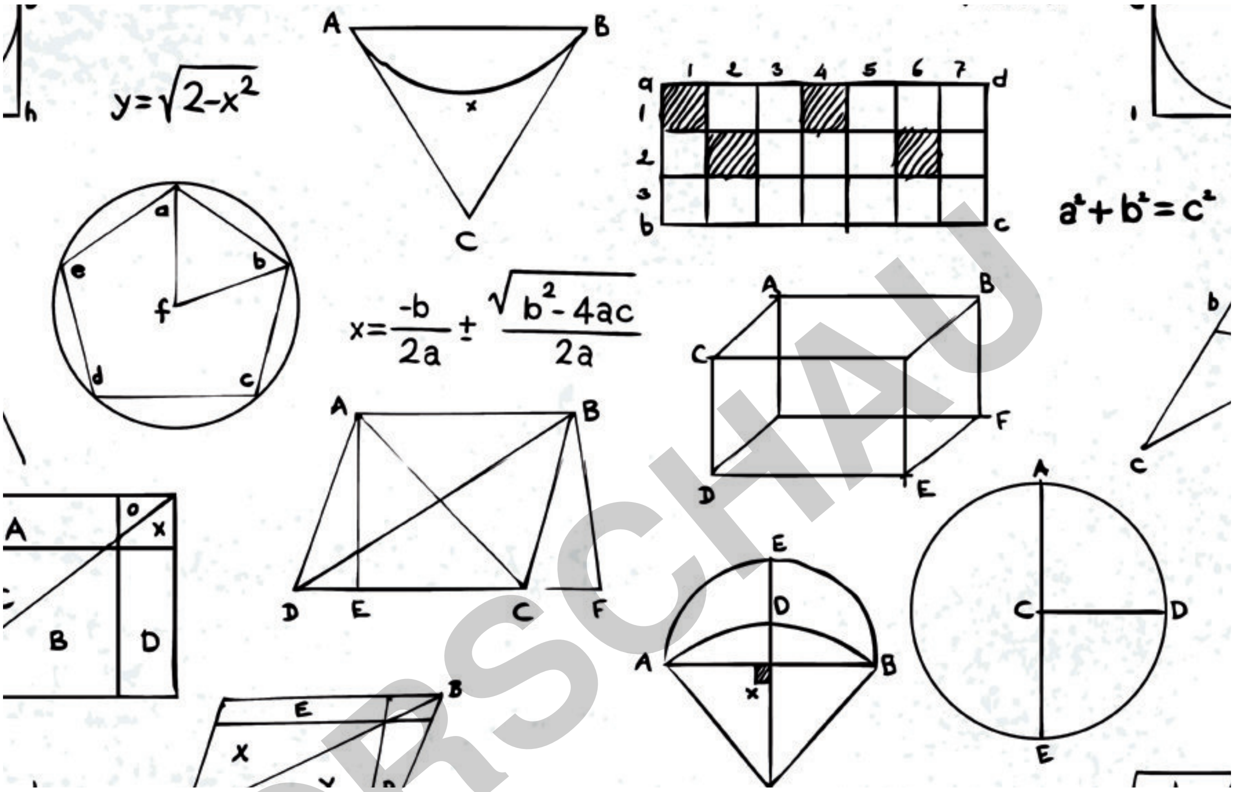
Flächeninhalte von Trapezen

von Günther Weber



© *mustafahacalaki/DigitalVision Vectors/Gettyimages*

Wie entstehen eigentlich Flächenformeln? Denkt sich die jemand einfach aus? Und warum funktionieren sie manchmal nur für bestimmte Fälle und für andere nicht? In diesem Beitrag beantworten sich die Schüler diese Fragen selbst, indem sie sich intensiv mit Trapezen und den Möglichkeiten der Vektorrechnung auseinandersetzen. Richtiges Tüfteln, kreative Ansätze und synergistisches Zusammenarbeiten sind gefragt.

Flächeninhalte von Trapezen

von Günther Weber

Kompetenzprofil:

Inhalt: Flächenformeln für Trapeze herleiten, Vektorrechnung: Betrag eines Vektors, Skalar- und Kreuzprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren, Geradengleichungen in Parameterform

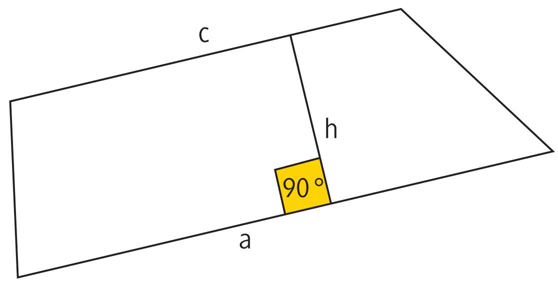
Kompetenzen: mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)

Formeln und Hilfen

Der Flächeninhalt eines Trapezes

Der Flächeninhalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten (Grundseiten) a und c und der Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$



Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der zugehörigen Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

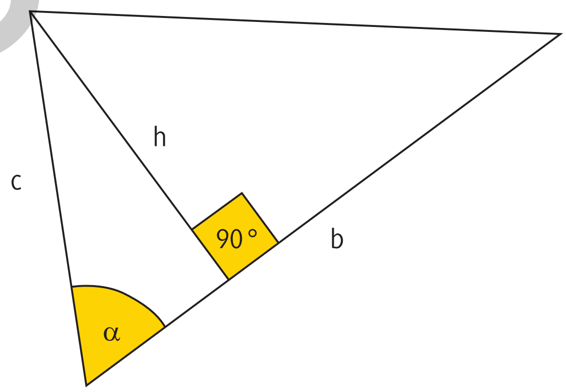
bzw. im nebenstehenden Beispiel mit der Grundseite b:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Es ist

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin(\alpha) \text{ und damit}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\alpha)$$



Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Längen zweier Dreieckseiten und dem Sinus des zwischen den Seiten eingeschlossenen Winkels.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Punkte A (5 | –3 | 4), B (1 | 5 | –4), $C\left(-\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{5}{3}\,\middle|\,-\frac{2}{3}\right)$ und D (1 | –1 | 2).
   a) Zeichnen Sie die vier Punkte in ein räumliches Koordinatensystem und verbinden Sie diese in der angegebenen Reihenfolge.
   b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.

2. Im Folgenden finden Sie einige Formeln zur Berechnung des Flächeninhaltes eines gleichschenkligen (symmetrischen) Trapezes mit den Grundseiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.
   Verdeutlichen Sie jeweils die Formeln durch Skizzen und leiten Sie den Rechenweg davon ab.
   Berechnen Sie dann damit den Flächeninhalt des Trapezes aus Aufgabe 1.

   a) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}}\right|$

   M_{AB} und M_{CD} sind die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

   b) $A = \frac{1}{2}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)\times\overrightarrow{AD}\right|$

   c) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\sin(\alpha)\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|$

   α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

   d) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\sqrt{\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 - \left(\frac{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right| - \left|\overrightarrow{CD}\right|\right|}{2}\right)^2}$

   e) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\right)\cdot\sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\sin(180° - \alpha)$

   α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$.

   f) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{DL_F}\right|$

   L_F ist der Lotfußpunkt des Lotes von D auf die Gerade durch die Punkte A und B.

   g) $A = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{CD}\right|\right)\cdot\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

3. Begründen Sie, welche der in Aufgabe 2 angegebenen Formeln nicht für die Berechnung des Flächeninhaltes eines beliebigen Trapezes genommen werden können.