Ist der Sommer länger als der Winter?

Manfred Vogel, Hiddenhausen
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

© *Colourbox, www.colourbox.com*

Im Spätsommer wird das Getreide geerntet. Im Winter liegen die Felder brach. Für Landwirte spielt es eine wichtige Rolle, welche Jahreszeit gerade ist. Manchem kommt es so vor, als dauere der Winter ewig. Sind die Jahreszeiten unterschiedlich lang und wenn ja, warum? Gehen Sie dieser Frage in einem problemorientierten Physikunterricht nach: Ihre Schüler stellen Hypothesen auf. Sie ergründen die Ursache für die unterschiedliche Länge der Jahreszeiten, indem sie Schlussfolgerungen aus den Kepler'schen Gesetzen ziehen. Anschließend vollziehen sie ihre Ergebnisse mithilfe des Gravitationsgesetzes auch rechnerisch nach.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Colourbox, www.colourbox.com
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.; Dr. Stefan Völker, Jena

Ist der Sommer länger als der Winter?

Oberstufe (Niveau)

Manfred Vogel, Hiddenhausen
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Die Schüler lernen:

Ihre Schüler lernen die Ellipse als mögliche Planetenbahn kennen und führen grundlegende Berechnungen zur Geometrie der Ellipse aus. Ausgehend vom bekannten Newton'schen Gravitationsgesetz und den Gesetzen der Kreisbewegung erkunden Ihre Schüler die Bewegung unserer Erde auf ihrer elliptischen Umlaufbahn. Dabei wird der sichere Umgang mit mathematischen Gleichungen und der Potenzschreibweise großer Zahlen geübt.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Das heliozentrische Weltbild	M 1	Ab
Die elliptischen Bahnen (Kepler, Newton)	M 2	Ab
Zur Definition der Ellipse	M 3	Ab
Die Ellipse des Gärtners	M 4	Ab
Die verschiedenen Geschwindigkeiten der Erde	M 5	Ab
Die Länge des Sommer- bzw. Winterbogens	M 6	Ab
Die Schiefe der Ekliptik	M 7	Ab

Hinweise

Das Interesse an der Erforschung des Weltraumes hat mit Beginn der Raketenflüge erheblich zugenommen. Die Schüler haben aus vielfältigen Veröffentlichungen erhebliches Wissen über diese Materie erworben. Offenbar sind aber nur wenige Quellen verfügbar, in denen die Frage des ‚Warum?', nach den Zusammenhängen und Abhängigkeiten von **Entfernungen**, **Geschwindigkeiten** und **Umlaufzeiten der Planeten** und der **Sonne** beantwortet wird. Die Schüler werden feststellen, dass man mit einigen wenigen Größen auskommt, dem **Aphel**, der weitesten Entfernung der Erde von der Sonne ($152{,}1 \cdot 10^9$ m, Juli), dem **Perihel**, der kürzesten Entfernung ($147{,}1 \cdot 10^9$ m, Januar), der Erdumlaufzeit (365,256 Tage) und der Gravitationskonstanten $G = (6{,}6743 \pm 0{,}00015) \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}$, um alle anstehenden Fragen mithilfe von mathematisch-physikalischen Berechnungen zu beantworten. Dabei gibt es nur eine Einschränkung: Es ist notwendig, bei der Berechnung des Umfangs der Ellipse und von deren Teilstücken von einer **Näherungsformel** auszugehen, die einen Fehlerquotienten von ca. 0,5 % beinhaltet. Damit können wir aber auf die Infinitesimalrechnung verzichten. Eine solche Differenz können wir uns durchaus leisten, weil auch in der Literatur einzelne Größen nur auf drei Stellen gerundet angegeben werden. Eine vierte Stelle ist bei unseren Berechnungen also immer mit einem Fragezeichen zu versehen.

Der Schüler kann mit dem mathematischen Rüstzeug, das er bis Klasse 10 erworben haben sollte, auskommen. Freilich: Er muss in der Bewältigung von Zehnerpotenzen sicher sein. Und er sollte bereit sein, zu seiner eigenen Kontrolle die Dimensionsbetrachtungen exakt durchzuführen.

Die Materialien sind systematisch aufgebaut. Schritt für Schritt werden die Schüler zu dem Ziel hingeführt, nämlich der Beantwortung der gestellten Frage nach der unterschiedlichen Länge der Jahreszeiten. Die einzelnen Materialeinheiten sind so aufbereitet, dass die Schüler – tunlichst in kleinen Gruppen – weitgehend selbstständig arbeiten können.

Deshalb eignet sich diese Arbeitseinheit auch und vor allem für (freiwillige) Arbeitsgemeinschaften, als **Projektarbeit**, für Schullandheimaufenthalte, wenn man nicht nach draußen gehen kann, und als Ergänzungsaufgabe für Schüler, die im Gruppenunterricht die für alle vorgesehenen Aufgaben vorzeitig erledigt haben.

Das **heliozentrische Weltbild des Kopernikus (M 1)** beantwortet noch nicht die Frage, die unserer Arbeitseinheit zugrunde liegt. Es erklärt nicht die damals durchaus bekannte Tatsache der unterschiedlichen Länge der Jahreszeiten. Die Antwort dazu, nämlich dass die Erde die Sonne auf einer Ellipse umkreist, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, hat **Johannes Kepler** in seinem ersten Gesetz gegeben **(M 2). Keplers zweites Gesetz** führt zu dem **Gravitationsgesetz von Newton**. Hier wird bereits die Gravitationskonstante G eingeführt. Das Material **M 3** veranlasst die Schüler, sich intensiv mit der Ellipse und ihrer Gesetzmäßigkeit auseinanderzusetzen. Die Ableitungen der Länge der beiden Hauptachsen und der Entfernung h der Erde von der Sonne in den Äquinoktien werden gegeben. Die Schüler die geforderten Strecken selbstständig ableiten zu lassen, wäre in vielen Fällen eine Überforderung der Schüler. Das könnte zu Lustlosigkeit und Desinteresse an den späteren Aufgaben führen. Die Materialien **M 4 und M 5** dienen der **Erfolgskontrolle**. Waren die Schüler bei den vorigen Arbeitsmaterialien zu flüchtig, dann würden sie bereits bei der Ellipse des Gärtners und erst recht bei der Berechnung der Erdbahn scheitern.

Die beiden Materialien **M 5 und M 6** bilden den logisch auf den gewonnenen Vorerkenntnissen basierenden Kern der Lerneinheit. Sie führen zur Antwort auf die gegebene Frage nach der unterschiedlichen Länge der Jahreszeiten.
Die Schüler dürften sich inzwischen hinreichend in die Materie eingearbeitet haben. Zwar werden auch in dem Material **M 5** die Ableitungen für die Berechnung der mittleren Erdgeschwindigkeit und der Sonnenmasse gegeben, aber in den Aufgaben zu **M 5** wird den Schülern abverlangt, dass sie die Berechnungen mit nur geringen Vorgaben selbstständig durchführen. **Die Aufgabe 2** (Sonnenmasse) ist von der **Lösung der Aufgabe 1** (mittlere Geschwindigkeit der Erde) abhängig.

Deshalb können beide gleichzeitig ausgegeben werden. Die **Aufgabe 3** (Mittelpunktswinkel), **Aufgabe 4** (Erdgeschwindigkeit auf den Teilstücken), **Aufgabe 5** (Bogenlängen) und **Aufgabe 6** (Durchlaufzeiten) von Material **M 5** bauen aufeinander auf. Sie sollten unbedingt nacheinander bearbeitet werden und nur dann, wenn die vorherige Aufgabe richtig gelöst ist. Würden die Schüler mit fehlerhaften Ausgangswerten weiterrechnen, dann kämen natürlich unsinnige Werte heraus. Lustlosigkeit, Unmut und Resignation wären gegeben. Besprechen Sie daher die Ergebnisse der Schüler im Plenum, bevor diese sich der nächsten Aufgabe widmen.

Das Material **M 6** setzt sich zunächst mit der fehlerhaften Aussage, dass der Sommer länger als der Winter sei, auseinander. Vielmehr muss man von der Zeit zwischen den beiden Äquinoktien, also vom Frühjahr-Sommer-Halbjahr und vom Herbst-Winter-Halbjahr sprechen. Die Überlegungen gelten alle für einen Beobachter auf der Nordhalbkugel – auf der Südhalbkugel sind die Jahreszeiten entgegengesetzt. Vereinfachend werden hier die Bezeichnungen ‚Sommerbogen' und ‚Winterbogen' gebraucht, deren Länge in **Aufgabe 1** zu bestimmen ist. Daraus kann man die beiden Durchschnittsgeschwindigkeiten **(Aufgabe 2)** und dann endlich die **Umlaufzeiten im ‚Sommerbogen'** und im **‚Winterbogen' (Aufgabe 3)** berechnen. Ein Vergleich mit den **kalendarischen Zeiten (Aufgabe 4**) zwischen den Herbstanfängen 2019 und 2020 zeigt den Schülern, dass wir trotz der Näherungsformeln und der relativ groben Ausgangswerte doch erfreulich genaue Ergebnisse erzielt haben.

Das **Material M 7** fordert dazu auf, eine Utopie zu berechnen. Wann würde die Erdachse senkrecht stehen **(Aufgabe 1**) und was würde sich hinsichtlich der Sonnenhöhe und der Jahreszeiten ändern **(Aufgabe 2)**? Meteorologischen und biologischen Spekulationen wären hier Tür und Tor geöffnet.

M 1 Das heliozentrische Weltbild

Blicken wir abends zum Himmel empor, so übt dieser mit seinen Milliarden Sternen, von denen ein paar tausend mit bloßem Auge sichtbar sind, auch heute noch eine große Faszination auf uns aus. Die Menschen in der Antike und im Mittelalter empfanden ähnlich. Zudem ging für sie vom Sternenhimmel ein großes Geheimnis aus: Sie sahen Sterne auf- und untergehen und bemerkten, dass je nach Jahreszeit unterschiedliche Sterne am Firmament zu sehen sind. Um dieses Geheimnis sowie die Entstehung der Jahreszeiten und die Bewegung der Sonne am Himmel im Tagesverlauf zu erklären, entwickelten sie Theorien über den Aufbau des Universums. Vollziehen Sie einige dieser wichtigen Theorien nach.

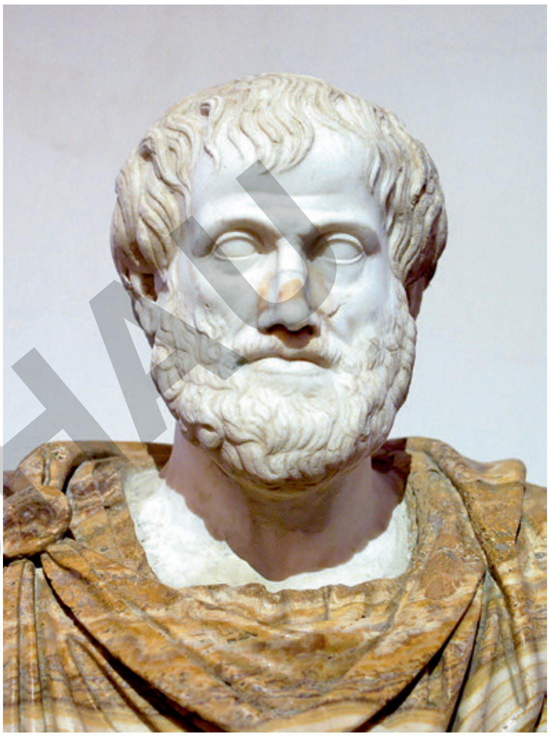

Abb. 1: Römische Büste des Aristoteles; © Jastrow

Bis ins späte Mittelalter galt die von **Aristoteles von Chalkidike** (384–322 v. Chr.) aufgestellte Theorie, wonach die Erde die Gestalt einer Kugel haben sollte und im Zentrum des Universums liegt. Aristoteles zufolge kreisen Sonne, Mond und alle Planeten um die Erde. Dieses Weltbild, bei dem die Erde im Mittelpunkt des Universums steht, wird als **geozentrisches** Weltbild bezeichnet. Der Begriff *geozentrisch* stammt von dem griechischen Wort *geokentrikó* (= „erdzentriert"). Doch viele Erscheinungen am Himmel sind mit diesem Weltbild nicht oder nur unzureichend zu erklären. So lassen sich die Schleifenbewegungen, die die Planeten am Himmel vollziehen, mit dieser Theorie nicht erklären. Ebenso bleibt unklar, warum die Jahreszeiten ungleich lang sind.

Erst **Nikolaus Kopernikus** (1473–1543), Domherr, Mathematiker und Astronom, rüttelte an der Lehrmeinung des Aristoteles. Er widerlegte bereits 1514 in seiner Schrift *De hypothesibus motuum coelestium commentariolus* einige Annahmen, auf denen das geozentrische System basiert, und entwarf ein **heliozentrisches Weltbild** (von griechisch *helios* (= „Sonne") und *kentron* (= „Mittelpunkt").

Bei diesem Weltbild steht die Sonne im Mittelpunkt und die Erde und die anderen Planeten bewegen sich in Kreisbahnen um sie. Doch erst in dem kurz vor seinem Tode 1543 erschienenen und später indizierten Werk *De revolutionibus orbium coelestium* („Von den Umdrehungen der Himmelskörper") veröffentlichte er „Belege", mit denen er das heliozentrische Weltbild untermauern konnte. In dem folgenden Auszug aus der Schrift (Band I, Kapitel X) entwickelt er eine genaue Vorstellung davon, welche Position die Sonne und die Planeten einnehmen:

„Die erste und oberste von allen Sphären ist die der Fixsterne, die sich selbst und alles andere enthält […]. Es folgt als erster Planet Saturn, der in dreißig Jahren seinen Umlauf vollendet. Hierauf Jupiter mit seinem zwölfjährigen Umlauf. Dann Mars, der in zwei Jahren seine Bahn durchläuft. Den vierten Platz in der Reihe nimmt der jährliche Kreislauf ein, in dem, wie wir gesagt haben, die Erde mit der Mondbahn als Enzykel enthalten ist. An fünfter Stelle kreist Venus in neun Monaten. Die sechste Stelle schließlich nimmt Merkur ein, der in einem Zeitraum von achtzig Tagen seinen Umlauf vollendet. In der Mitte von allen aber hat die Sonne ihren Sitz."

Der Planet Uranus taucht in der Beschreibung von Kopernikus nicht auf. Er ist aufgrund seiner geringen Helligkeit schlecht zu erkennen und wurde daher erst 1781 von Wilhelm Herschel bei Himmelsbeobachtungen entdeckt.

Die Vorstellung eines heliozentrischen Universums war dabei nicht neu. Bereits der griechische Astronom und Mathematiker **Aristarch von Samos** (um 310–230 v. Chr.) hatte die Ansicht vertreten, dass sich die Planeten auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen und lediglich der Mond die Erde umkreist. Er wurde zu seiner Zeit jedoch nicht ernst genommen. Es ist sicher, dass Kopernikus aus den Schriften von Aristarch entscheidende Anregungen bezogen hat.

Mithilfe des heliozentrischen Weltbildes ließen sich aber zwei wichtige Fakten nicht klären: Die Bahnen einiger Planeten verliefen immer noch anders, als es die Theorie des Kopernikus vermuten ließ. Und: Auch Kopernikus konnte mit seinem Weltbild die unterschiedliche Dauer der Jahreszeiten nicht erklären.

Aufgabe

Begründen Sie, warum nach der Theorie des Kopernikus alle Jahreszeiten gleich lang sein müssten.

M 2 Die elliptischen Bahnen (Kepler, Newton)

Die Lösung fand erst **Johannes Kepler** (1571 bis 1630), der bei seinen Forschungen auf ein umfangreiches astronomisches Zahlenmaterial zurückgreifen konnte, das **Tycho Brahe** (1546 bis 1601), sein Vorgänger als Astronom und Astrologe bei Kaiser Rudolf II., zusammengetragen hatte. Kepler fand heraus, dass sich die Planeten nicht auf Kreisbahnen, wie Kopernikus vermutet hatte, sondern auf Ellipsenbahnen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht (**1. Keplersches Gesetz**). In Sonnennähe bewegen sich, so Keplers zweites Gesetz, die Planeten schneller als in Sonnenferne. (Abb. 2).

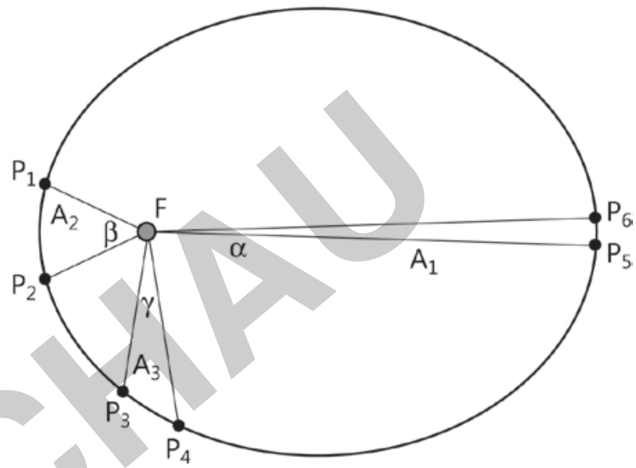

Abb. 2; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Die Flächen A_1, A_2 und A_3 sind gleich groß. Nach dem **2. Keplerschen Gesetz** ist die Zeit, in der der Planet von P_1 nach P_2 läuft, genauso groß wie die Zeit, in der er von P_3 nach P_4 bzw. von P_5 nach P_6 läuft.

In den Aufgaben von **M 6** werden Sie solche Zeiten berechnen.

In einem später veröffentlichten dritten Gesetz sagt Kepler, dass die Quadrate der Umlaufzeiten gleich den Kuben der mittleren Entfernungen der Planeten von der Sonne sind: Je weiter die Planeten von der Sonne entfernt sind, desto langsamer sind sie.

Unerlässlich für unsere folgenden Überlegungen und Berechnungen ist das (allgemeine) Gravitationsgesetz von **Isaac Newton** (1643 bis 1727). Er hatte erkannt, dass die Gravitationskraft abhängig ist von dem Produkt der beiden beteiligten Massen, dividiert durch das Quadrat ihrer Mittelpunktsentfernungen:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Die Gravitationskonstante G ist sehr klein. Zu Newtons Zeiten konnte man sie experimentell noch nicht bestimmen. Das gelang erst Mitte des 19. Jahrhunderts. Sie beträgt

$$G = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg \cdot s^2}.$$

M 3 Zur Definition der Ellipse

Um die späteren Berechnungen durchführen zu können, müssen wir uns zunächst mit der Definition der Ellipse beschäftigen: Die Ellipse ist eine in sich geschlossene Kurve, bei der für jeden Punkt P die Summe der Entfernungen von zwei festliegenden Punkten (F_1 und F_2) gleich ($= 2a$, $a = \overline{P_1M} = \overline{P_2M}$) ist. Die Entfernung der beiden Punkte $\overline{F_1F_2}$ wird mit 2e bezeichnet. Die Länge der größeren der beiden senkrecht aufeinanderstehenden Achsen beträgt 2a, die der kürzeren Achse 2b (Abb. 2).

Die Differenz zwischen der großen Achse der Erdbahn und der kleinen Achse beträgt nur etwas mehr als 1 %. Deshalb sind alle Grafiken der Erdbahn verzerrt.

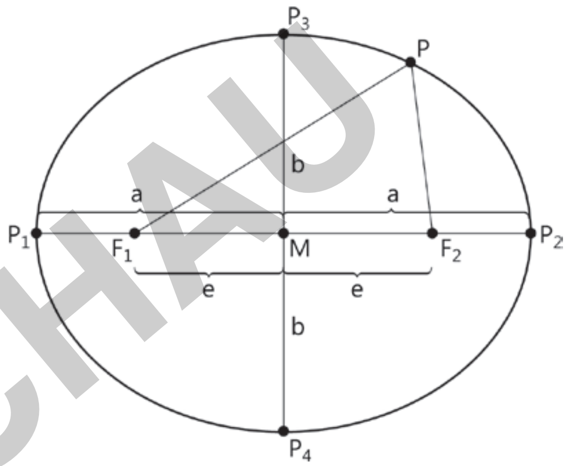

Abb. 3; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Aufgabe

Vollziehen Sie hier und in der Folge in den Ableitungen und Aufgabenstellungen jede einzelne Zeile schriftlich nach! Nur so gelingt es Ihnen, die Aufgabenmaterialien gedanklich zu durchdringen.

Entsprechend der Definition der Ellipse ist die Summe der Strecken $\overline{F_1P}$ und $\overline{PF_2}$ gleich 2a.

Zur Berechnung der Länge der großen Achse $\overline{P_1P_2}$:

$\overline{F_1P_2} + \overline{F_2P_2} = 2a$ (laut Definition) [1]

$\overline{P_1F_1} = \overline{F_2P_2}$ [2]

Wenn man den rechten Term aus [2] in [1] einsetzt, ergibt sich:

$\overline{F_1P_2} + \overline{P_1F_1} = 2a.$

Zur Berechnung der Länge der kleinen Achse $\overline{P_3P_4} = 2b$ (Abb. 4).

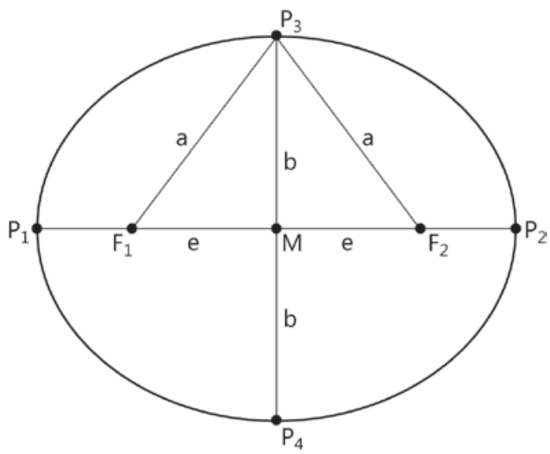

Abb. 4; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Im Dreieck F_1MP_3 gilt: $\overline{P_3M}^2 + \overline{F_1M}^2 = \overline{F_1P_3}^2$

$b^2 + e^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2 - e^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - e^2}$ [3]

Für die späteren Berechnungen der Länge von Teilstrecken der Ellipse benutzen wir die Näherungsformel $r_ø \approx \frac{1}{3} \cdot (2m + n)$, [4]

wobei m die längere und n die kürzere Achse ist. Diese Formel hat für annähernd gleich große Achsen (m, n) eine hinreichende Genauigkeit im Bereich von drei Stellen, sodass wir sie für die Ellipsenbahn der Erde um die Sonne verwenden können.

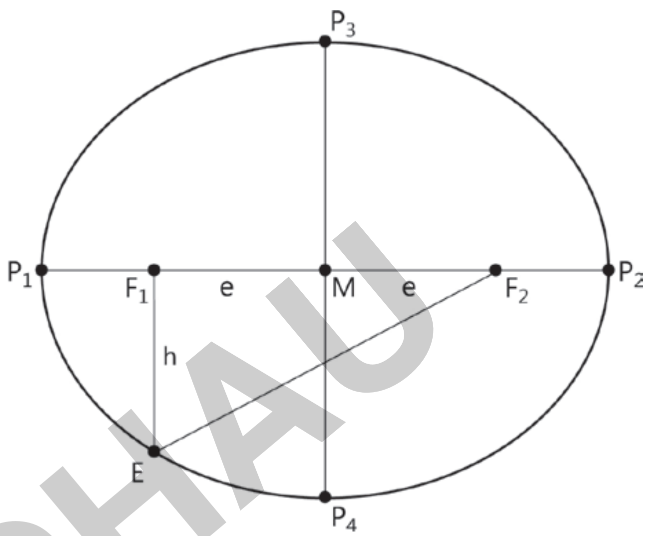

Abb. 5; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Für spätere Berechnungen benötigen wir auch die Länge h (Position der Erde im Frühjahrs-Äquinoktium) (Abb. 5):

Im Dreieck EF_2F_1 gelten:

$\overline{EF_2}^2 = \overline{F_1F_2}^2 + \overline{EF_1}^2 \quad \overline{EF_2}^2 = (2e)^2 + h^2$ [5]

und $\overline{EF_2} = 2a - h$ (Definition der Ellipse). [6]

[6] wird quadriert und in [5] eingesetzt:

$(2a - h)^2 = (2e)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 - 4ah + h^2 = 4e^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4a^2 - 4ah = 4e^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - ah = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad ah = a^2 - e^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{a^2 - e^2}{a}$ [7]

M 4 Die Ellipse des Gärtners

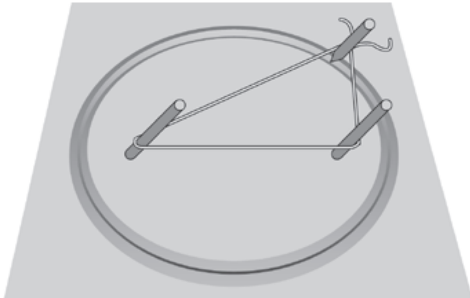

Abb. 6; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Sie sollten sich weiter mit der Ellipse vertraut machen, weil Sie mit ihr im Folgenden arbeiten müssen. Deshalb helfen Sie bitte einem Gärtner, der ein Beet in Form einer Ellipse herstellen soll. Deren größere Achse $\overline{P_1P_2}\left(= 2a\right)$ sollte dreimal so lang wie die kürzere Achse $\overline{P_3P_4}\left(= 2b\right)$ sein. Der Gärtner setzte zwei Pflöcke in die Erde – das sind die Brennpunkte F_1 und F_2 –, legte über sie eine hinreichend lange in sich geschlossene Schnur und umfährt mit der stets gestrafften Schnur die beiden Pflöcke (Abb. 6). Aber der arme Mann muss sehr lange probieren, wie weit die Pflöcke voneinander entfernt sein müssen und wie lang die in sich geschlossene Schnur ist, ehe er das verlangte Verhältnis von $a = 3b$ fand. Sie können dem Gärtner dabei helfen!

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie zunächst die beiden Werte für den Abstand der Brennpunkte und die Länge der Schnur, indem Sie mit dem Wert $3b = a$ rechnen.

b) Versuchen Sie eine allgemeine Ableitung. Die kürzere Achse $\overline{P_3P_4}\left(= 2b\right)$ soll gleich $q \cdot 2a$ mit ($q < 1$) sein.

Aufgabe 2: Die Berechnung der Erdbahn

Die kürzeste Entfernung der Erde zur Sonne (Perihel) liegt um den 2. Januar und beträgt $147{,}1 \cdot 10^9$ m, die weiteste Entfernung (Aphel) um den 3. Juli beträgt $152{,}1 \cdot 10^9$ m. Der kürzeste Tag (Wintersonnenwende) ist nicht identisch ist mit der kürzesten Entfernung der Erde von der Sonne. Entsprechendes gilt für das Aphel. Wie bei allen astronomischen Längen sind hier die Entfernungen zwischen den beiden Mittelpunkten der Sonne bzw. der Erde angegeben, die in der Astronomie auch als Schwerpunkt der Himmelskörper gelten. Mit den beiden Längen von Perihel und Aphel können Sie die folgenden Größen berechnen:

a) die Länge der großen Achse der Erdbahn $\left(2a\right)$,

b) den Abstand $F_1F_2\left(= 2e\right)$ der beiden Brennpunkte,

c) die Länge der kürzeren Achse der Erdbahn $\left(2b\right)$,

d) den mittleren Radius $r_{ø}$ der Erdbahn,

e) den Abstand h zwischen Sonne und Erde im Frühjahrs-Äquinoktium.

M 5 Die verschiedenen Geschwindigkeiten der Erde

Um die mittlere Geschwindigkeit $v_{\varnothing}$ zu berechnen, wenden Sie die Formel zur Fliehkraft eines um einen Drehpunkt kreisenden Körpers $F_z = m_1 \cdot \frac{v^2}{r}$ [8]

und das Gravitationsgesetz von Newton $F_a = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ [9]

an. In beiden Fällen ist r der Mittelpunktsabstand der beiden Körper m_1 und m_2. Wenn der kreisende Körper m_1 sich weder von dem als Drehpunkt bezeichneten zweiten Körper m_2 entfernt noch ihm sich nicht nähert, sind F_z und F_a gleich groß:

$$m_1 \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad [10]$$

Da m_1 und r ungleich 0 sind, können wir die Gleichung [10] vereinfachen:

$$v^2 = G \cdot \frac{m_2}{r} \qquad [11]$$

m_1 ist die Masse des Körpers, der um den anderen mit der größeren Masse kreist. m_1 ist also in unserem Fall die Masse der Erde (m_E). Die Gleichung [11] zeigt, dass die Umlaufgeschwindigkeit v der Erde nicht von ihrer Masse, sondern lediglich von dem Abstand der Erde zur Sonne und der Masse $m_2 \left(= m_S\right)$ der Sonne abhängig ist. G ist die Gravitationskonstante, die Sie bereits in Material **M 2** kennengelernt haben.

Hier wie bei den folgenden Ableitungen müssen Sie sich wegen der teils sehr großen und teils sehr kleinen Größen mit der Exponentialschreibweise vertraut machen. Notwendig ist auch eine exakte Dimensionsbetrachtung, die bisweilen recht kompliziert ist, wie die Dimension von G zeigt. Es hilft Ihnen aber, Ihre Gleichungen zu kontrollieren, wenn Sie die Dimensionen exakt bestimmen.

Für die weiteren Berechnungen müssen Sie die Masse der Sonne kennen. Um die Rechnung zu vereinfachen, berechnen Sie zunächst die mittlere Umlaufgeschwindigkeit der Erde $v_{\varnothing}$:

$$v_{\varnothing} = \frac{2\pi \cdot r_{\varnothing}}{t} \qquad [12]$$

$r_{\varnothing}$ kennen Sie ja bereits. Vereinfachend gehen Sie aus von einer Umlaufzeit von 365,25 Tagen (julianischer Kalender). Die Differenz zum gregorianischen Kalender (mit 365,256 Tagen) würde sich erst in der 6. Stelle bemerkbar machen. Vergessen Sie auch nicht die Dimensionsbetrachtung!

Aufgabe 1: Die mittlere Geschwindigkeit der Erde

Berechnen Sie mit der Gleichung [12] die mittlere Geschwindigkeit $v_{ø}$ der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne. Diese Gleichung nennen Sie [13].

Aufgabe 2: Berechnung der Sonnenmasse m_S

Rechnen Sie Gleichung [11] nach m_S um und setzen Sie die bekannten Werte ein. Diese Gleichung nennen Sie [14].

Hinweis: Dieses Ergebnis runden Sie bitte auf zwei Stellen hinter dem Komma auf. Diesen neuen Wert m_S für die Masse legen Sie den folgenden Berechnungen zugrunde.

Aufgabe 3: Die Mittelpunktswinkel

Berechnen Sie die Mittelpunktswinkel im Aphel (α), im Perihel (β) und im Äquinoktium (δ).

Es gilt, das **zweite Gesetz von Kepler** an drei exponierten Stellen zu verifizieren: Im Aphel, im Perihel und im Äquinoktium. Wir berechnen jeweils die Fahrstrahlwinkel, wobei wir den Fahrstrahlwinkel α im Aphel (weiteste Entfernung von der Sonne) gleich 1^0 setzen. Die übrigen Winkel müssen wegen der geringeren Entfernungen zur Sonne größer als α sein (Abb. 7).

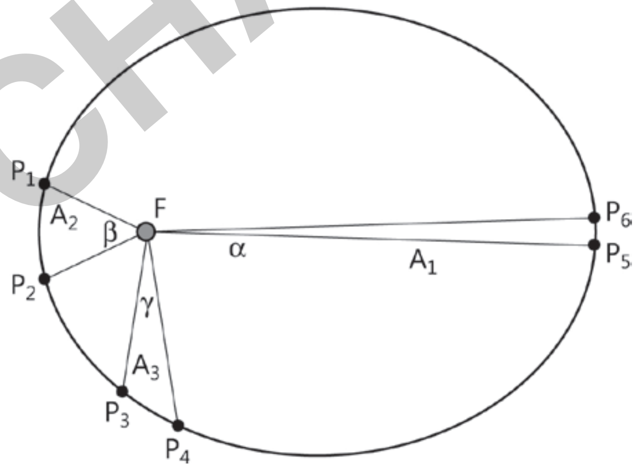

Abb. 7; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Berechnen Sie mit der Gleichung

$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^0} \qquad [15]$$

die Fläche des Fahrstrahls A_S von $\alpha = 1^0$ im Aphel in m².

Hinweis: Die Gleichung [15] stellt eine Näherung da. Der Ellipsensektor ist hierin durch einen Kreissektor ersetzt. Möglich ist dies, weil die Winkel hier hinreichend klein sind.

Die Fahrstrahlfläche A_S kennen Sie nun. Sie benötigen Sie für die folgenden zwei Berechnungen. Da nach dem zweiten Gesetz von Kepler die Fahrstrahlen bei gleicher Zeit die gleiche Fläche haben, können sie nun mit der Gleichung [15] die Winkel β im Perihel und δ im Äquinoktium berechnen. Nennen Sie die Fahrstrahlfläche zum Perihel A_W und die zum Äquinoktium $A_Ä$.

$$A_W = \frac{\pi \cdot 147{,}1^2 \cdot 10^{18} \cdot \beta}{360^0}\ m^2 \qquad [16]$$

Lösen Sie die Gleichung nach β auf.

Es ist sinnvoll, von Zeit zu Zeit seine Berechnungen zu überprüfen. Hier ergibt sich eine gute Gelegenheit, indem Sie in die Gleichung [16] Ihren Wert für β einsetzen: $A_W =$ _____ m^2.

Verfahren Sie genauso zur Berechnung des Winkels δ. Die Entfernung h der Erde zur Sonne im Äquinoktium kennen Sie bereits [7]: $A_Ä = \frac{\pi \cdot h \cdot \delta}{360^0}$. Lösen Sie nach δ auf. Machen Sie auch hier die Probe durch die Berechnung der Fahrstrahlfläche $A_Ä$: $A_Ä =$ _____ m^2.

Aufgabe 4: Die Geschwindigkeit der Erde auf den ausgewählten Bogenstücken

Zur Verifizierung des zweiten Gesetzes von Kepler benötigen wir außerdem die Dauer der Durchlaufzeiten der Erde auf den zurückgelegten Strecken (Bogenstücken). Da das nicht direkt gelöst werden kann, müssen Sie zunächst die verschiedenen Geschwindigkeiten der Erde v_S, v_W und $v_Ä$ auf den Bogenstücken und deren verschiedenen Längen s_S, s_W und $s_Ä$ berechnen. Erst dann ist es möglich, die entsprechenden Durchlaufzeiten t_S, t_W und $t_Ä$ zu bestimmen. Zur Berechnung der Geschwindigkeit v der Erde benutzen Sie die Gleichung [11]. Im Aphel, der größten Entfernung zur Sonne, gilt: $v_S^2 = G \cdot \frac{m_S}{r_S}$.

Der Radius r_S beträgt $152{,}1 \cdot 10^9$ m. Als Masse der Sonne nehmen Sie den Wert $m_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Bestimmen Sie v_S. Steht die Erde im Perihel, dann beträgt der Abstand zur Sonne $147{,}1 \cdot 10^9$ m. Bestimmen Sie v_W.

Den Abstand zur Zeit der Äquinoktien $h_Ä \left(= r_Ä\right)$ hatten Sie mit Gleichung [7] in der Aufgabe 2e in **M 4** berechnet. Bestimmen Sie $v_Ä$.

Aufgabe 5

Berechnung der Bogenlängen im Aphel (b_S), im Perihel (b_W) und im Äquinoktium ($b_Ä$).

Zur Berechnung benötigen Sie die Winkel α, β und δ, die Sie in Aufgabe 4.3 ermitteln hatten. Für die Bogenlänge b_S im Aphel ($\alpha = 1^\circ$, $r_S = 152{,}1 \cdot 10^9$ m) gilt:

$$b_S = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S \cdot \alpha}{360^\circ}.$$

Bestimmen Sie b_S in m. Entsprechend berechnen Sie die Bogenlänge b_W im Perihel ($\beta = 1{,}06914^\circ$, $r_W = 147{,}1 \cdot 10^9$ m): $b_W = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S \cdot \beta}{360^\circ}$.

Bestimmen Sie b_W in m.

Und schließlich berechnen sie die Bogenlänge $b_Ä$ zur Zeit der Äquinoktien ($\delta = 1{,}03425^\circ$; $h = 149{,}56 \cdot 10^9$ m).

$$b_Ä = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_Ä \cdot \delta}{360^\circ}$$

Bestimmen Sie $b_Ä$ in m.

Aufgabe 6

Berechnung der Durchlaufzeiten im Aphel (t_S), im Perihel (t_W) und im Äquinoktium ($t_Ä$).

Aus der Geschwindigkeit (Aufgabe 4) und der Länge der Bogenstücke ($\beta = s$) (Aufgabe 5) können Sie jeweils die Durchlaufzeiten errechnen.

$$v = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

Bestimmen Sie t_S. Entsprechend die Durchlaufzeit im Perihel:

Bestimmen Sie t_W und zur Zeit der Äquinoktien $t_Ä$.

Sie werden herausfinden, dass die errechneten Zeiten nicht genau übereinstimmen. Suchen Sie nach einer Erklärung für diese Ungenauigkeit.

M 6 Die Länge des Sommer- bzw. Winterbogens

Das Frühjahr-Sommer-Halbjahr bezeichnet man auch als Sommerbogen, das Herbst-Winter-Halbjahr auch als Winterbogen.

Sie haben mit Aufgabe 4 (**M 5**) errechnet, dass die Geschwindigkeit im Perihel (am 2. Januar) größer ist als im Aphel (um den 3. Juli). Die vermutete längere Dauer des Frühjahr-Sommer-Halbjahres ist demnach nicht nur durch die größere Bogenstrecke, die die Erde zu dieser Zeit zurücklegt, bedingt, sondern auch durch die geringere Geschwindigkeit. Aus diesem Grunde müssen Sie sowohl die unterschiedlichen Bogenlängen als auch die verschieden großen Geschwindigkeiten bei der Berechnung der Laufzeiten berücksichtigen.

Die mittleren Radien $r_ø$ und die Längen B von ‚Sommerbogen'/‚Winterbogen'

Um die Bogenlängen zur Zeit des Aphel (b_S), des Perihel (b_W) und der Äquinoktien ($b_Ä$) nicht mit den hier zu berechnenden Bogenlängen zwischen den beiden Äquinoktien zu verwechseln, notieren wir hier B_S bzw. B_W.

Für die Berechnung des mittleren Radius ($r_ø$) benutzen wir die Näherungsformel [4].

Aufgaben

1.

a) **Der mittlere Radius $r_{øS}$ und die Länge B_S des Sommerbogens:**
Die längere Strecke ist hier der Abstand im Aphel, die kürzere Strecke der Abstand h zur Zeit der Äquinoktien (Abb. 5).

$r_{øS} = \frac{1}{3} \cdot (2m + n)$. Berechnen Sie $r_{øS}$ in Metern.

Zur Berechnung der Länge B_S des Sommerbogens:
Der Winkel zwischen den beiden Äquinoktien beträgt 180^0.
Berechnen Sie B_S in Metern.

b) **Der mittlere Radius $r_{øW}$ und die Länge B_W des Winterbogens:**

$r_{øW} = \frac{1}{3} \cdot (2m + n)$. Berechnen Sie $r_{øW}$ in Metern.

Berechnen Sie die Länge B_W des Winterbogens in Metern.