Inhalt

1 Grundlagen

1.1 Das Zufallsexperiment

Bei einem Zufallsexperiment (auch Zufallsversuch genannt) handelt es sich um einen Versuch, der unter bestimmten Bedingungen durchgeführt wird und einen zufälligen Ausgang besitzt.

Definition

Eigenschaften eines Zufallsexperimentes:

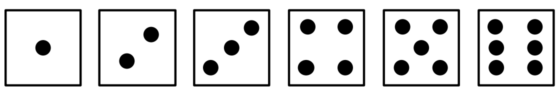
- geplanter und kontrolliert ablaufender Zufallsvorgang
- wiederholbar unter gleichen Bedingungen
- mögliche Ergebnisse des Vorgangs stehen im Voraus fest
- das tatsächliche Ergebnis ist im Voraus nicht bekannt

Beispiele: Werfen eines Würfels, Ziehung der Lottozahlen

1.2 Ergebnis, Ereignis und Ergebnisraum

Ein Elementarereignis ist ein einzelnes und sich gegenseitig ausschließendes mögliches Ergebnis ω eines Zufallsexperimentes. Wenn wir einen Würfel einmal werfen, gibt es nur folgende Möglichkeiten, wie der Würfel fallen kann:

Ergebnisraum



$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = 2$ $\omega_3 = 3$ $\omega_4 = 4$ $\omega_5 = 5$ $\omega_6 = 6$

Die Menge aller möglichen Ergebnisse ω_i heißt Ergebnisraum Ω, wobei jedes Ergebnis genau einmal in Ω vorkommt. Für unser Beispiel mit dem einmaligen Werfen eines Würfels folgt für den Ergebnisraum:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Jede Zusammenfassung von einem oder mehreren Ergebnissen eines Zufallsexperimentes in einer Menge wird Ereignis genannt. Beispiele für Ereignisse:

2 Baumdiagramme

Baumdiagramme können durch eine kleine Erweiterung sehr geschickt zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen mehrstufiger Zufallsexperimente benutzt werden.

Einstieg

Dazu werden an den Zweigen die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten eingetragen, mit denen das zum Zweig gehörige Ereignis des Zufallsexperimentes eintritt. Diese Wahrscheinlichkeiten nennt man kurz *Zweigwahrscheinlichkeiten*. Ein Baumdiagramm, das Zweigwahrscheinlichkeiten enthält, nennt man auch kurz Wahrscheinlichkeitsbaum. Üblicherweise gibt man alle Zweigwahrscheinlichkeiten entweder komplett als Brüche oder Dezimalzahlen an.

2.1 Mit oder ohne Zurücklegen?

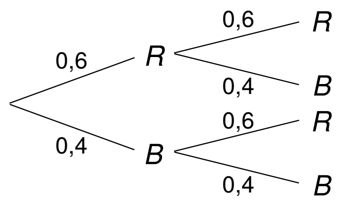
Grundlegend ist aus der Aufgabenstellung zu entnehmen, ob es sich bei dem Zufallsexperiment um ein Experiment mit oder ohne Zurücklegen handelt. Machen wir uns anhand eines Beispiels deutlich, wo der Unterschied zwischen beiden Experimenten liegt.

2.1.1 Zufallsexperiment „mit Zurücklegen“

In einer Urne befinden sich 60 rote Kugeln (R) und 40 blaue Kugeln (B). Wir ziehen zwei Kugeln mit Zurücklegen. Wie wir bereits wissen, können wir hier die Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen und erhalten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

mit Zurücklegen

$$P(R) = \frac{60}{100} = 0{,}6 \text{ bzw. } P(B) = \frac{40}{100} = 0{,}4$$



Erste Ziehung:
Im Baumdiagramm sehen wir die Wahrscheinlichkeiten im ersten Zug eine rote oder eine blaue Kugel zu ziehen. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse, erhalten wir: $P(\Omega) = 1$.

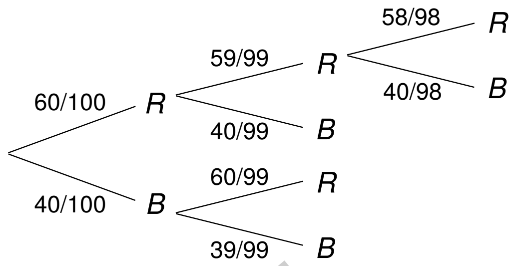
Zweite Ziehung:
Beim zweiten Zug hat man wieder die gleiche Chance eine rote oder eine blaue Kugel zu ziehen, da die Kugeln wieder zurücklegt werden. Dementsprechend ist festzuhalten, dass beim Ziehen mit Zurücklegen bei jedem Zug die gleichen Eintrittswahrscheinlichkeiten vorliegen (Laplace-Wahrscheinlichkeit). Auch hier müssen die einzelnen Ereignisse an jedem Knoten die Summe 1 betragen.

2.1.2 Zufallsexperiment „ohne Zurücklegen“

ohne Zurücklegen

In einer Urne befinden sich 60 rote Kugeln (R) und 40 blaue Kugeln (B). Wir ziehen zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Wie wir bereits wissen, können wir hier die Laplace-Wahrscheinlichkeit berechnen und erhalten die folgenden Wahrscheinlichkeiten für den ersten Zug:

$$P(R) = 0{,}6 = \frac{60}{100} \text{ bzw. } P(B) = 0{,}4 = \frac{40}{100}$$



Erste Ziehung:
Im Baumdiagramm sehen wir die Wahrscheinlichkeiten im ersten Zug eine rote oder eine blaue Kugel zu ziehen. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten für beide Ereignisse, erhalten wir: $P(\Omega) = 1$.

Zweite Ziehung:
Im Gegensatz zum *Ziehen mit Zurücklegen* ändern sich die Wahrscheinlichkeiten beim *Ziehen ohne Zurücklegen* im zweiten Zug. Zieht man beispielsweise im ersten Zug eine rote Kugel, so hat man im zweiten Zug eine geringere Wahrscheinlichkeit eine rote Kugel zu ziehen. Warum? Weil sich die Anzahl der günstigen und der möglichen Ereignisse (eine Rote Kugel weniger) um 1 verringert. Es befinden sich also nur noch 59 rote und insgesamt 99 Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug eine rote Kugel zu ziehen, ändert sich von 60/100 auf 59/99.

Merke: Bei Zufallsexperimenten ohne Zurücklegen ist es sinnvoller Brüche statt Dezimalzahlen für die Wahrscheinlichkeiten zu verwenden.

2.2 Wahrscheinlichkeit mit Pfadregel

Pfadregeln

Um die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses zu erhalten, multipliziert man die Wahrscheinlichkeit entlang des Pfades, der dieses Ergebnis beschreibt. Wichtig: Die Pfadregel gilt bei jedem mehrstufigen Zufallsexperiment, gleichgültig, ob mit oder ohne Zurücklegen.

Zur **Ermittlung einer Wahrscheinlichkeit**

- zeichnet man ein **Baumdiagramm** und
- wendet die **Pfadregel** an!

Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gesucht,

- genügt es, nur die Pfade zu zeichnen, die zu diesem Ereignis gehören,
- die Pfadregel anzuwenden und
- die Wahrscheinlichkeiten dieser Pfade zu addieren (Summenregel).

1. Pfadregel (Produktregel):
Die Wahrscheinlichkeiten eines einzelnen Ergebnisses ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, der zu diesem Ergebnis führt.

7 Hypothesentests

Hypothesentests werden immer dann durchgeführt, wenn man irgendetwas mit Hilfe von erhobenen Daten nachweisen möchte, zum Beispiel dass auf dem Oktoberfest die Maßkrüge nicht ganz vollgemacht werden. Der Grundsatz bei allen statistischen Tests ist hierbei, dass wir das Gegenteil widerlegen müssen - wir müssen also widerlegen, dass der Maßkrug tatsächlich mit einem Liter gefüllt ist.

Wir können uns diesen Grundsatz mit einer Gerichtsverhandlung vorstellen, denn wie es so schön heißt: Im Zweifel für den Angeklagten. Man geht davon aus, dass der Angeklagte unschuldig ist (ohne es genau zu wissen). Um von der Schuld des Angeklagten überzeugt zu werden, müssen ausreichend Beweise gesammelt werden, welche die Schuld ohne Zweifel darlegt. Falls nicht genug Beweise vorliegen, muss davon ausgegangen werden, dass er unschuldig ist. Wir können diesen Sachverhalt in statistischen Hypothesen zusammenfassen:

- H_0: Der Angeklagte ist unschuldig.
- H_1: Der Angeklagte ist schuldig.

Es stehen sich damit zwei einander widersprechende Behauptungen / Vermutungen (sog. Hypothesen) gegenüber. Die Nullhypothese H_0, die geprüft werden soll und ihre logische Verneinung, die Alternativ- bzw. Gegenhypothese H_1. Die Begriffe sind hierbei so zu verstehen, dass geprüft wird, ob H_1 bewiesen werden kann, man also bei ergebnisloser Suche weiter H_0 als gültig erachtet. Der Hypothesentest dient nun dazu anhand des Ergebnisses einer Stichprobe zu einer Entscheidung darüber zu kommen, welche der beiden Hypothesen man eher zu glauben bereit ist oder anders ausgedrückt: welche der beiden Hypothesen angenommen (bzw. beibehalten) und welche verworfen wird.

Eine 100%-ige Sicherheit, dass die angenommene Hypothese auch tatsächlich wahr ist, kann der Hypothesentest naturgemäß niemals bieten, da wir von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten solcher Tests benutzt man die Binomialverteilung.

7.1 Übersicht

Übersicht

In diesem Abschnitt wollen wir euch eine grobe Übersicht zum Thema *Testen* geben. Dabei sei die Aussage: 30% lieben Mathe, welche unsere H_0 Hypothese sein soll. Mit Hilfe des Stichprobenumfangs $n = 100$ (100 Schüler wurden befragt) und der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt werden. Der höchste Wert der Verteilung entspricht dabei immer dem Erwartungswert. Die folgende Abbildung zeigt uns, welcher Test infolge der Aufgabenstellung durchgeführt werden soll und wie die Gegenhypothese H_1 lauten muss.

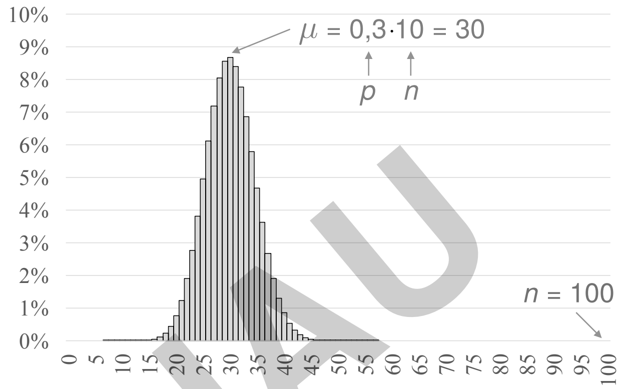
Aussage: **30% lieben Mathe!**

→ Nullhypothese: H_0: $p_0 = 0{,}3$

Stichprobenumfang: $n = 100$

Wahrscheinlichkeit: $p = 0{,}3$

Erwartungswert: $\mu = 30$



	Alternativtest	linksseitiger Hypothesentest	rechtsseitiger Hypothesentest	beidseitiger Hypothesentest
mögliche Aufgabenstellung	„…jemand sagt, dass 40% Mathe lieben…“	„…ob weniger als 30%…“	„…ob mehr als 30%…“	„…ob sich die 30% geändert haben…“
Gegenhypothese	$H_1 : p_1 = 0{,}4$	$H_1 : p_1 < 0{,}3$	$H_1 : p_1 > 0{,}3$	$H_1 : p_1 \neq 0{,}3$

Behauptet jemand etwas anderes, zum Beispiel das 40% Mathe lieben anstatt 30%, wird ein Alternativtest durchgeführt. Neben dem Alternativtest gibt es noch den einseitigen Hypothesentest, der links- oder rechtsseitig sein kann und den beidseitigen Hypothesentest.

In den nächsten Abschnitten werden wir sehen, wie solche Hypothesen aufgestellt werden, was es mit diesen Fehlern auf sich hat und wie wir Hypothesentests mit σ-Regeln und der Tabelle der Normalverteilung durchführen.

7.2 Aufstellen der Hypothesen

Bevor ein Hypothesentest durchgeführt werden kann, müssen die Hypothesen bestimmt werden. Wir unterscheiden folgende Hypothesentest-Arten:

Alternativtest:	$H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p = p_1$
Einseitiger Signifikanztest:	$H_0 : p \leq p_0$ gegen $H_1 : p > p_0$ $H_0 : p \geq p_0$ gegen $H_1 : p < p_0$
Zweiseitiger Signifikanztest:	$H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$

Beispiel Frau Wanka sagt, dass 10% aller Schüler mit Videos lernen. Daniel ist anderer Meinung und behauptet, dass 30% aller Schüler mit Videos lernen. Sie beschließen, dass wenn mindestens 3 Schüler mit Videos lernen, die Hypothese von Daniel stimmt. Am Nachmittag fährt Daniel in die Remscheider City und fragt 10 Schüler, ob sie mit Videos lernen.

	$A = [0; 1; 2]$ Entscheidung für H_0	$\bar{A} = [3; \ldots; 10]$ Entscheidung für H_1
$p_0 = 0{,}1$ stimmt	Sicherheit 1. Art $P(X \leq 2) = F(10; 0{,}1; 2) \approx 93\%$	Fehler 1. Art $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ $= 1 - F(10; 0{,}1; 2) \approx 7\%$
$p_1 = 0{,}3$ stimmt	Fehler 2. Art $P(X \leq 2) = F(10; 0{,}3; 2) \approx 38{,}3\%$	Sicherheit 2. Art $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ $= 1 - F(10; 0{,}3; 2) \approx 61{,}7\%$

Schreiben wir uns diese Informationen mal auf:

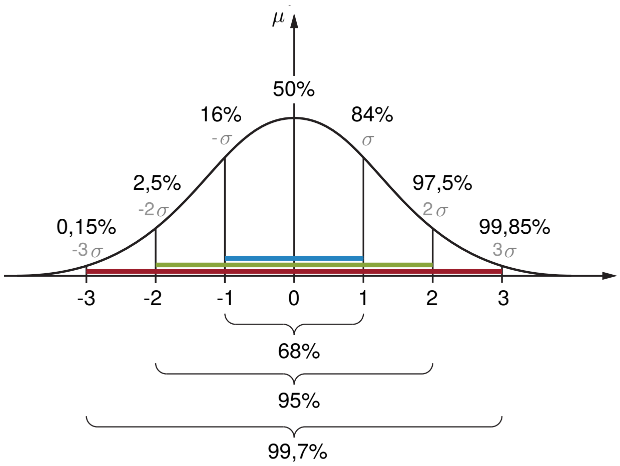
- Nullhypothese $H_0: \; p_0 = 0{,}1$ und Alternativhypothese $H_1: \; p_1 = 0{,}3$
- Testgröße X: Anzahl der Videolerner; Stichprobe: $n = 10$
- Annahmebereich: $A = [0; 1; 2]$, Ablehnungsbereich: $\bar{A} = [3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10]$

Der Fehler 1. Art wird im Ablehnungsbereich von H_0 bestimmt mit der Wahrscheinlichkeit von H_0. Die Wahrscheinlichkeit beträgt 7%, dass H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich stimmt. Der Fehler 2. Art wird im Annahmebereich von H_0 bestimmt mit der Wahrscheinlichkeit von H_1. Mit einer 38,3%-igen Wahrscheinlichkeit entscheiden wir uns für H_0, obwohl H_1 in Wirklichkeit stimmt.

7.8 Hypothesentest mit σ-Regeln

Die σ-Regeln beziehen sich auf die Standardnormalverteilung. Sie geben an, wie viel Prozent der Fläche unter der Glockenkurve im Bereich von 1, 2 oder 3 Standardabweichungen links und rechts vom Mittelwert liegt.

Ungefähr 68% der Werte liegen innerhalb einer Standardabweichung vom Mittelwert. Ebenso liegen ungefähr 95% der Werte innerhalb von zwei Standabweichungen vom Mittelwert. Und ca. 99,7% der Werte befinden sich innerhalb von drei Standardabweichungen vom Mittelwert.



Die Standardabweichung bei der Binomialverteilung berechnet sich wie folgt:

$$X \sim B(n; p): \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$