II.A.31

Analysis

Die Bedeutung der zweiten Ableitung

Florian Borges, Traunstein
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Funktionale Zusammenhänge zwischen zwei Zahlenbereichen (üblicherweise x und y = f(x)) werden gern als Graphen dargestellt, deren Steigungsverhalten sich in vielfältiger Weise ändern kann. Der Graph kann steigen, dann immer stärker steigen oder immer weniger stark. Entsprechendes gilt für das Fallen. Analytisch wird dieses grafische Verhalten beschrieben durch die 1. bzw. 2. Ableitung und insbesondere deren Vorzeichen bzw. Nullstellen. Haben die Schüler die Ankeridee der 1. Ableitung verstanden, stellt auch der Transfer auf die Ableitung der Ableitung bzw. die 2. Ableitung kein großes Problem mehr dar.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12 (G9)
Dauer:	6–8 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), Kommunizieren (K5)
Thematische Bereiche:	Differenzialrechnung
Zusatzmaterialien:	GeoGebra-Dateien auf CD-ROM 78

Didaktisch-methodische Hinweise

Die Ankeridee[1] der Ableitungsfunktion – als Lieferantin der Tangentensteigung – ist als erster Baustein der analytischen Kurvendiskussion nach den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen der typische **Einstieg** in die Infinitesimalrechnung. Nach Einführung der aus Schülersicht meist erfreulich gut handhabbaren **Ableitungsregeln** und reichlich Übung derselben stellt sich sinnvollerweise u. a. die Frage nach der 2. Ableitung und ihrem anschaulichen Sinn als „Steigung der Steigung“. Die **Krümmungsrichtung** des Graphen – je nach Vorzeichen dieser 2. Ableitung – betrachten Sie im Unterricht meist nur qualitativ. Das vertiefende Problem ihrer fehlenden quantitativen Aussagekraft fällt leider wegen Zeitmangel oft unter den Tisch, wird hier aber optional als Material für besonders interessierte Schülerinnen und Schüler[2] angeboten. Die vollständige „klassische“ **Kurvendiskussion** einschließlich der systematischen **Wendepunktesuche** schließt mit einer größeren Übung ab.

Ablauf

Beginnen Sie in Kleingruppen mit der **Bedeutung der (1.) Ableitung** (Wiederholung, **M 1**) als Grenzübergang von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Nach den „lästigen“ h- bzw. $(x - x_0)$-Kürzübungen erinnern Sie an die bereits bekannten **Ableitungsregeln** (Wiederholung, **M 2**) mit der übersichtlichen Kopiervorlage zu Aufgabe 2.

Das Herzstück des Gesamtbeitrags folgt schrittweise: zunächst die **Bedeutung der 2. Ableitung** (**M 3**). Die Aussage der 2. Ableitung zur Krümmungsrichtung des Graphen ist dabei allgemein übliche Oberstufen-Hausmannskost in Mathematik (zusammenfassend dargestellt **M 4**).

Eher nur in leistungsstärkeren Lerngruppen bzw. bei ausreichendem Zeitpuffer angezeigt ist die optionale Ergänzung **M 5**. Hier wird der Krümmungskreis als Analogon zur Tangente bei der Steigung thematisiert und entsprechend als Näherung für den Kurvenverlauf interpretiert. Die Aufgabe dazu ist eine sehr „hässliche“ Algebraübung, sorgt aber ggf. für ein deutlich tieferes Verständnis der Rolle von $f''(x)$. Zusammenfassend werden dann die verbreiteten Module der Kurvendiskussion bei Nullstellen, Extrema und Wendestellen im Überblick (**M 6**) behandelt, ehe die Abschlussübung (**M 7**), auch einsetzbar als Lernerfolgskontrolle, das Thema abrundet.

Vorkenntnisse

Die Schüler kennen die schulüblichen Funktionen und deren Ableitungsregeln, erste Grundelemente der Kurvendiskussion sind geläufig.

Vorbereitung und Ablauf der Arbeit an der Lerntheke

Einstieg: Sammeln Sie die **Vorkenntnisse** bzgl. des Begriffes „Steigung“ bei den Jugendlichen: Warum kann eine (zugegebenermaßen recht steile) Straße durchaus 150 % Steigung haben und welchem Winkel entspricht das?

Sie kopieren dann die Materialien **M 1–M 7** (ggf. ohne das optionale **M 5**) in Klassenstärke und laminieren jeweils ein Exemplar, das Sie mit den Kopien an einem zentralen Ort im Klassenraum auslegen. Die Schüler werden von Ihnen in Arbeitsgruppen aufgeteilt, holen sich die Materialien jeweils in Gruppenstärke und fertigen in der Gruppe für **M 1–M 7** ggf. jeweils eine Folie mit den Aufgabenlösungen an, die dann in der Folgestunde von einem Gruppenmitglied im Plenum vorgestellt und bei Bedarf gemeinsam „verbessert“ werden.

[1] „Ankeridee“ ist in der fachdidaktischen Literatur ein anderes Wort für „Oberbegriff“.

[2] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

Ziele

Die Schüler

- wiederholen die Theorie zur Ableitung verschiedenster Funktionen.
- erkennen die Sinnhaftigkeit der wiederholten Anwendung dieser Regeln und deren grafische Bedeutung.
- vertiefen ggf. in **M 5** den Unterschied qualitativer und quantitativer Aussagen in dieser Hinsicht.
- üben zusammenfassend die schließlich vollzähligen Werkzeuge als Bestandteile einer Kurvendiskussion.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K1, K2, K5	L4, L3	… vergegenwärtigen sich die wesentliche Bedeutung der 1. Ableitung (**M 1**, **M 2**), … zeigen Sicherheit im Umgang mit den zu wiederholenden Ableitungsregeln (**M 2**),	I, II
K1, K5	L4	… erkennen nach zunächst ritualisierter Bestimmung der 2. Ableitung als „Ableitung der Ableitung" die Aussagekraft und Bedeutung dieser Funktion (**M 3**),	II
K1, K3, K5	L4, L3	… vergleichen die Übertragung der Begriffe „Steigung" von der Geraden auf eine Kurve sowie „Krümmung" von einem (Krümmungs-) Kreis auf eine Kurve (**M 4**),	II
K1, K2, K3, K5	L4	… verstehen ggf. die eingeschränkte (rein qualitative) Aussagekraft der 2. Ableitung bzgl. Krümmung nach algebraischer Erfassung der Tatsache, dass für die Krümmung tatsächlich auch die 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle eine wesentliche Rolle spielt (**M 5**),	III
K1, K2, K5	L4, L3	… verbinden die Elemente der Kurvendiskussion zu einem effizienten Analysis-Werkzeugset (**M 6** und **M 7**).	II, III

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen
Ab = Arbeitsblatt; Fo = Folie; Wh = Wiederholungsblatt; LEK = Lernerfolgskontrolle

1./2. Stunde

Thema: **Einstieg**

M 1 (Wh) Bedeutung der 1. Ableitung – frischen Sie Ihr Wissen auf!
Zusammenhang zwischen Funktions- und Ableitungsgraph, grafisches Ableiten

M 2 (Wh) Ableitungsübungen – frischen Sie Ihr Wissen auf!
Wichtige Ableitungsregeln

Benötigt:
☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
☐ Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra

3.–6. Stunde

Thema: **Die Grundlagen schaffen**

M 3 (Ab) Die Bedeutung der 2. Ableitung
Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktion, 1. und 2. Ableitung, „Krümmung“ oder „Steigung der Steigung“

M 4 (Ab) Steigung und Krümmung – qualitativ und quantitativ
Die tatsächlich qualitativ brauchbare 1. Ableitung als Wert der (Tangenten-) Steigung an einer Stelle im Vergleich zur Vorzeichenregel der 2. Ableitung für die Krümmungsrichtung des Funktionsgraphen ebenda

M 5 (Ab) Krümmung und 2. Ableitung – quantitativ
Approximiert man lokal den Funktionsgraphen durch seinen Krümmungskreis, dann lässt sich aus dessen Radius herleiten, dass für eine quantitative Aussage zur Krümmung außer der 2. auch die 1. Ableitung wesentlich ist.

Benötigt:
☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
☐ Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra

7./8. Stunde

Thema: **Weiterführung und Vertiefung**

M 6 (Ab) Nullstellen, Extrema und Wendestellen im Überblick
Zusammenfassung der Module zur Kurvendiskussion

M 7 (LEK) Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!
Klausurvorschlag

Benötigt:
☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
☐ Computer mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra

Bedeutung der 1. Ableitung – frischen Sie Ihr Wissen auf! M 1

Merke:

Eine Gerade ist bekanntlich durch zwei ihrer Punkte festgelegt. Wählt man also zwei Punkte P und Q auf dem Graphen einer Funktion f, dann ist die Gerade $\overline{PQ}$ eine Sekante durch den Graphen. Verschiebt man nun den Punkt Q näher und immer näher an den Punkt P heran, dann ist zwar für den Grenzfall P = Q nur noch ein Geradenpunkt bekannt, aber der Grenzwert

$$\lim_{x_Q \to x_P} \frac{f(x_Q)-f(x_P)}{x_Q - x_P}$$

liefert die Steigung der Tangenten (als Grenzfall der Sekante!) des Graphen in P.

Dieser Grenzwert heißt die Ableitung f′ von f an der Stelle x_P, in der ebenfalls verbreiteten Schreibweise „h-Methode“, also

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Der bislang nur für Geraden sinnvolle Begriff der Steigung wird hiermit übertragen auf nicht geradlinig verlaufende Funktionsgraphen. Man sagt, der Graph habe bei einem Graphenpunkt P die Steigung der Tangenten in P. Anschaulich kann man sich das so vorstellen: bei ausreichend starker Vergrößerung (vgl. „Quadrat-Zoom“ unten) verläuft jeder (anständige) Funktionsgraph an jeder Stelle nahezu geradlinig (mit eben dieser Steigung).

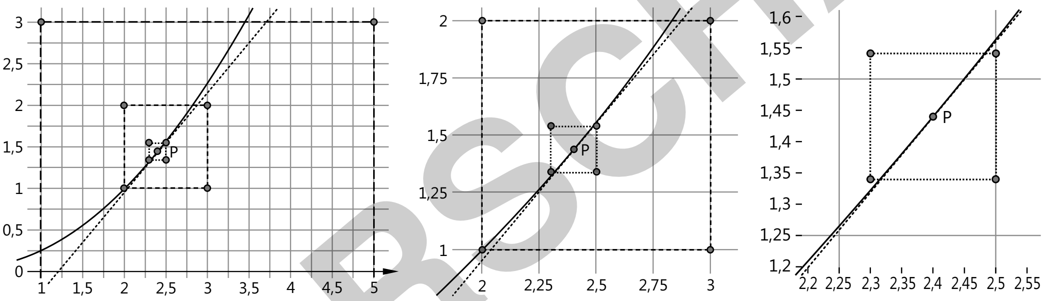


Abb. 1–3, Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Zusammenhang zwischen Funktions- und Ableitungsgraph:

Bei den Nullstellen der Ableitung f′(x) hat G_f eine waagerechte Tangente. P ist dann Hochpunkt (Maximum, „HoP“), Tiefpunkt (Minimum, „TiP“) oder Terrassenpunkt („TeP“, falls f′ nicht das Vorzeichen wechselt).

Aufgaben

1. Skizzieren Sie zum in Abbildung 1 skizzierten Graphen der Funktion
   $f(x) = 0{,}25x^2$
   den Graphen der Ableitungsfunktion f′.
   Hinweis: Die Ableitungsfunktion f′ schneidet den Graphen von f in zwei Punkten.
2. Zeigen Sie zunächst mit der „h-Methode“ (s. o.), dass für $f(x) = x^3$ gilt:
   $f'(x) = 3x^2$.
   Zeichnen Sie anschließend beide Graphen in ein Koordinatensystem.

M 2 Ableitungsübungen – frischen Sie Ihr Wissen auf!

Merke: Hier sind alle bekannten Ableitungsregeln im Überblick:

a) Ableitungsregeln für bestimmte Funktionen:

$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Q})$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

b) Allgemeine Ableitungsregeln für Funktionen:

Addition einer Konstanten	$f(x) = g(x) + c$	$f'(x) = g'(x)$
Faktorregel	$f(x) = c \cdot g(x)$	$f'(x) = c \cdot g'(x)$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{[v(x)]^2}$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Mit dieser „Handvoll" Regeln lässt sich jede bekannte Funktion ableiten, das wird jetzt gleich nochmal geübt!

Aufgaben

1. Leiten Sie folgende Funktionen ohne GTR bzw. CAS ab (Definitionsmenge angeben)!

   a) $f(x) = \left[\sin(4x^2)\right]^3$ b) $g(x) = \frac{-3\sqrt{x} + \ln(x^3)}{3 + x}$ c) $h(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 3x}$

2. Ordnen Sie jeweils die richtige Funktionsgleichung zu und skizzieren Sie in die ganzseitige Kopie der Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion.

   $g_1(x) = x^2 \cdot e^{-x}$;

   $g_2(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^x$;

   $g_3(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$;

   $g_4(x) = x^2 \cdot \ln(3 + x)$

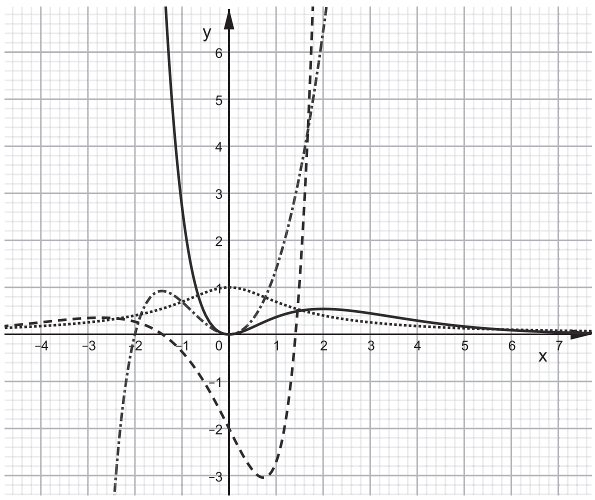


Abb. 4, Grafik: Florian Borges

Kopiervorlage zu M 2 (Aufgabe 2)

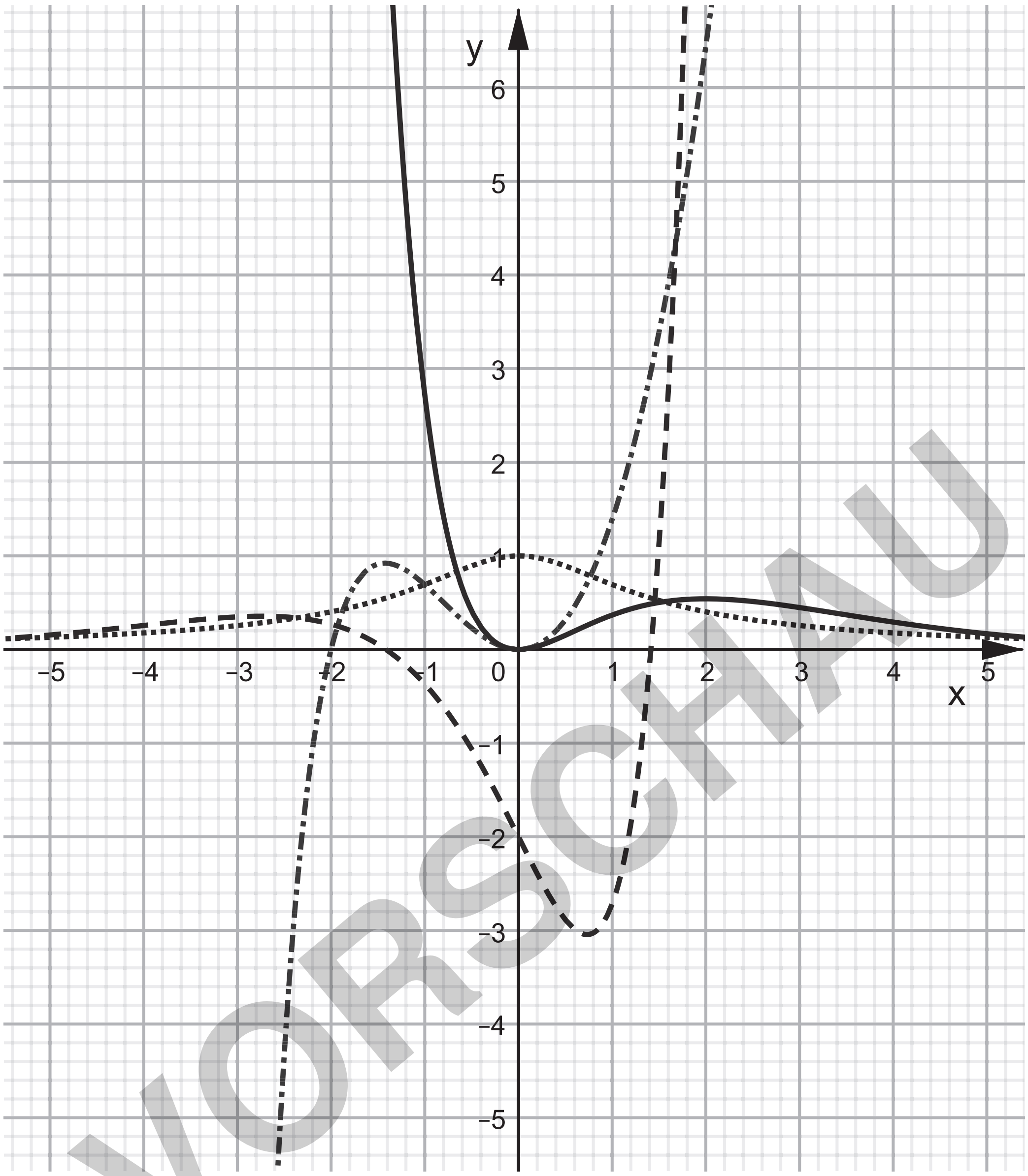


Abb. 5, Grafik: Florian Borges

Aufgabe

Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen? Ordnen Sie zu!

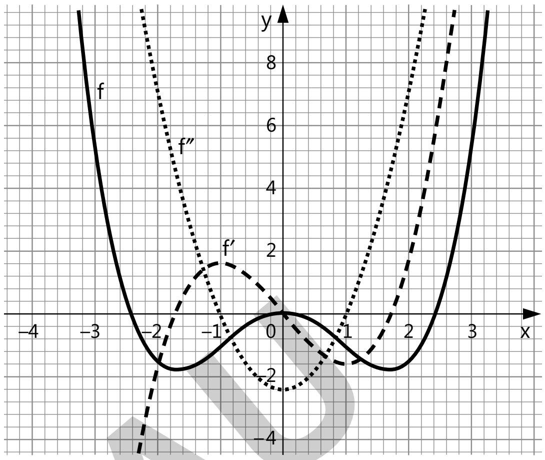
Hinweis: Skizzieren mit Wertetabelle ist möglich. Oder Sie verwenden das CAS Ihres GTR und malen den Graphen vom CAS-Display ab.

$g_1(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, $g_2(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^x$

$g_3(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$, $g_4(x) = x^2 \cdot \ln(3+x)$

M 3 Die Bedeutung der 2. Ableitung

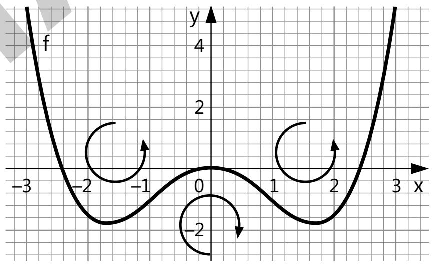
Die Ableitungsfunktion liefert die Steigung des Funktionsgraphen („der Funktion"). Leitet man diese Ableitung ein weiteres Mal ab, dann erhält man natürlich die „Steigung der Steigung der Funktion". Das ist nicht so gut vorstellbar wie die „Tochter der Tochter der Tochter" als „Urenkelin".
Besser vorstellbar ist die 2. Ableitung als Indikator für die ***Krümmung*** des Funktionsgraphen.

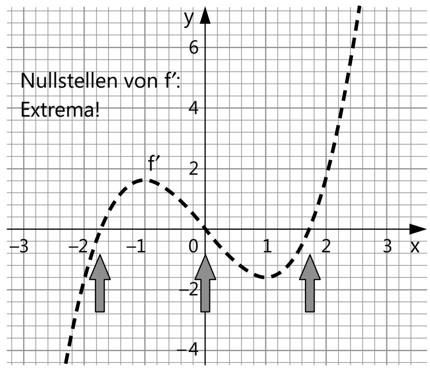


Die Regeln für die 2. Ableitung sind selbstverständlich die gleichen wie für die 1. Ableitung. Bei den Nullstellen liegen also ggf. Punkte mit maximaler oder minimaler Steigung, weil dort die Steigung extrem werden kann. Solche Punkte nennt man Wendestellen (Wendepunkt oder „WeP"): beim Zeichnen des Funktionsgraphen wechselt man an diesen Punkten von einer Links- in eine Rechtskurve bzw. umgekehrt (wie üblich „von links nach rechts denkend", sonst gerade andersherum!).

Bsp.:

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2 \cdot (x^2 - 6) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{6}{5}x^2$
(G_f durchgezogen, $G_{f'}$ gestrichelt, $G_{f''}$ punktiert)
An den Einzelbildern erkennt man die Zusammenhänge besser:
Die Nullstellen von G_f sind bei 0 (doppelt) sowie bei $\pm\sqrt{6}$.
Die Nullstellen von $G_{f'}$ sind wegen
$f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x = \frac{4}{5}x\,(x^2 - 3)$ bei 0 (einfach mit Vorzeichenwechsel) sowie bei $\pm\sqrt{3}$, dort liegen die Hoch- und Tiefpunkte.
Die Nullstellen von $G_{f''}$ sind wegen
$f''(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{12}{5} = \frac{12}{5}(x^2 - 1)$ bei ± 1 (einfach mit Vorzeichenwechsel), dort ist die Steigung von G_f extrem, man wechselt dort (als Fahrradweg aus der Vogelperspektive interpretiert) von einer Links- in eine Rechtskurve bzw. umgekehrt.





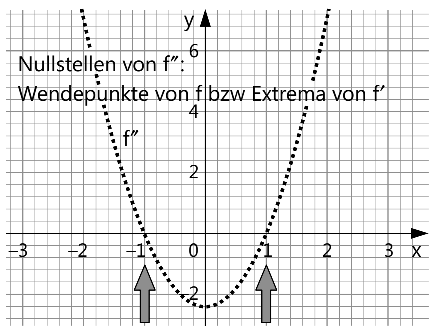


Abb. 6–9, Grafiken: Dr. W. Zettlmeier

Aufgabe
Bestimmen Sie den Wendepunkt von
$g(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 6x^2)$
und zeichnen Sie den Graphen von g.

Steigung und Krümmung – qualitativ und quantitativ

M 4

Den Begriff der ***Steigung*** kann man von der Geraden auf allgemeine Funktionsgraphen übertragen, wobei die Gerade – im Gegensatz zu allgemeinen Graphen – konstante Steigung über ihren gesamten Verlauf hat. Für allgemeine Graphen macht der Begriff nur bezogen auf einen speziellen Punkt Sinn.

Merke:
$f'(x) > 0$ bedeutet streng monotones Steigen, $f'(x) < 0$ streng monotones Fallen des Graphen.

Die **1. Ableitung** liefert nicht nur *qualitativ* eine Aussage über den Graphen, sondern darüber hinaus auch *quantitativ*: Falls $f'(x) = 3 > 2$, steigt der Graph steiler als wenn $f'(x) = 2$.
Der Winkel α zwischen x-Achse und Tangente lässt sich berechnen aus $\tan \alpha = f'(x)$.
Die **2. Ableitung** ist formal die Steigung der Steigung oder Änderungsrate der Änderungsrate. Dies ist aber nicht anschaulich. Der Begriff der **Krümmung** taugt hier qualitativ mehr:
Aus $f''(x) > 0$ folgt: Die Steigung steigt. Der Graph wird also steiler (bzw. stärker gekrümmt).
Aus $f''(x) < 0$ folgt hingegen: Die Steigung fällt. Der Graph verläuft flacher (also weniger stark gekrümmt).
Bei einer Nullstelle $f''(x) = 0$ verschwindet die Krümmung, dort liegt ein **Flachpunkt** bzw. bei Vorzeichenwechsel an der Nullstelle ein **Wendepunkt** oder „WeP" ($f'''(x) \neq 0$).

Beispiel:
Am Graphen aus dem Eingangsbeispiel **M 3** sieht man: Im Bereich mit $f''(x) < 0$, also zwischen $x = -1$ und 1, ist der Graph von f rechts gekrümmt. Sonst ist $f''(x) > 0$ und G_f ist links gekrümmt.

Merkregel 1:
f″ n**e**gativ bedeutet R**e**chtskrümmung, f″pos**i**tiv bedeutet L**i**nkskrümmung.

Damit erhält man ein **Kriterium für Extremstellen**: Ist $f'(x) = 0$ (= waagerechte Tangente „WaT") und $f''(x) > 0$ (pos**i**tiv), dann liegt wegen der L**i**nkskrümmung ein M**i**nimum vor. Falls aber $f''(x) < 0$ (neg**a**tiv) ist, dann liegt wegen R**e**chtskrümmung ein M**a**ximum vor.

Merkregel 2:
Falls $f' = 0$, also bei waagerechter Tangente:
f″ neg**a**tiv bedeutet M**a**ximum, f″ pos**i**tiv bedeutet M**i**nimum.

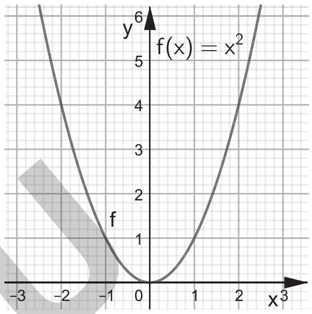
Aufgabe
Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat einen HoP bei (1|0), einen TiP bei (3|–2) und einen WeP bei (2|–1). Bestimmen Sie die Funktionsgleichung p(x) und zeichnen Sie (zur Kontrolle) den Graphen.

M 5 Krümmung und 2. Ableitung – quantitativ

Während der Begriff *Steigung* seinen Ursprung bei den Geraden hat, die eine konstante (!) Steigung haben, kommt der Begriff der *Krümmung* von den **Kreisen** mit ihrer je nach *Radius* konstanten Krümmung. Starke Krümmung hat ein Kreis, wenn sein Krümmungsradius klein ist, schwache Krümmung entsprechend bei großem Krümmungsradius.
Hier werden nun konstante Krümmung und konstante 2. Ableitung verglichen, um zu sehen, inwieweit man den Wert der 2. Ableitung auch quantitativ als **Krümmungsmaß** verwenden kann.

Beispiele:

1. Konstante 2. Ableitung am Beispiel $f(x) = x^2$
   Man erhält $f'(x) = 2x$ und schließlich $f''(x) = 2$.
   Die 2. Ableitung der quadratischen Funktion hat also **konstant** den Wert 2, die Krümmung der Parabel ist jedoch eindeutig **nicht überall gleich**, sondern beim Scheitel am größten.



2. Oberer Halbkreis (Radius r = 2) als Bsp. konstanter Krümmung:
   Für die Halbkreispunkte gilt:
   $y^2 + x^2 = r^2 = 4$ (Satz des Pythagoras)
   und damit die Funktionsgleichung
   $k(x) = \sqrt{4 - x^2}$ mit Definitionsbereich $D_k = [-2;2]$.
   Für die 2. Ableitung ergibt sich wegen
   $f'(x) = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-0,5} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$ schließlich
   $$f''(x) = \frac{-\sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)} = \frac{\frac{-4+x^2}{\sqrt{4-x^2}} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{(4-x^2)} = \frac{-4}{(4-x^2)^{1,5}} \neq \text{const},$$
   die 2. Ableitung hat also trotz konstanter Krümmung keinen konstanten Wert.

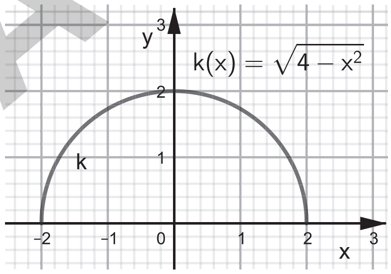


Abb. 10 und 11, Grafiken: F. Borges

Fazit:
Die 2. Ableitung eignet sich zwar *qualitativ* zur Bestimmung der *Krümmungs**richtung*** (links oder rechts je nach Vorzeichen), ***nicht*** aber ***quantitativ*** für die Bestimmung der Stärke der Krümmung. Für eine quantitative Aussage zur Krümmungsstärke benötigt man zusätzlich die 1. Ableitung, die (aufwendige!) Aufgabe liefert die notwendigen Details.

Aufgabe
Leiten Sie aus $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (mit r als Radius des oberen „Schmiegehalbkreises") sowie $f'(x)$ und $f''(x)$ die Formel
$$r = \frac{-\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$$
her, in der auch die 1. Ableitung vorkommt. **Hinweis:** Das Krümmungsverhalten eines Graphen ändert sich nicht bei Verschiebung, wir nehmen also guten Gewissens an, dass der „interessierende" Krümmungskreis seinen Mittelpunkt im Ursprung hat (f(x) lässt sich ggf. leicht so anpassen!).

Nullstellen, Extrema und Wendestellen im Überblick M 6

Die „besonderen" Punkte von Funktionsgraphen erhält man systematisch, indem man die folgende „Kurvendiskussion" (ggf. nach Bestimmung der Definitionsmenge) durchführt.

Merke: Schritte einer Kurvendiskussion:

1. Nullstellen (Schnittpunke mit der x-Achse) sind die Lösungen der Gleichung f(x) = 0.
2. Der y-Abschnitt hat den Wert f(0).
3. Extrema von knickfreien, durchgehenden Graphen liegen bei Punkten mit waagerechten Tangenten, dort ist jeweils f'(x) = 0.
4. Bei einem HoP ist f"(x) < 0 (Rechtskurve des Graphen), bei einem TiP ist f"(x) > 0 (Linkskrümmung), bei einem TeP (Terrassenpunkt) ändert das Vorzeichen von f'(x) sich nicht.
5. Wendestellen liegen dort, wo Links- und Rechtskrümmung wechseln, dort ist jeweils f"(x) = 0 mit Vorzeichenwechsel bzw. $f'''(x) \neq 0$.
6. Weiterhin interessant sind das Verhalten des Graphen an den Definitionsrändern und ggf. vorhandene Symmetrien des Graphen, etwa zum Koordinatensystem.

Beispiel

Ein schönes Beispiel ist die „Gauß'sche Glockenkurve" mit Gleichung $f(x) = e^{-x^2}$.

1. G_f hat keine Nullstellen, weil die e-Funktion immer positive Werte liefert.
2. y-Abschnitt ist bei 1.
3. $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
   $f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2} \cdot \left(2x^2 - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{0,5}$ (mit VZW!)
4. Waagerechte Tangente (WaT) bei x = 0, wegen f"(0) < 0 dort also HoP (0|1).
5. Wendestellen mit Vorzeichenwechsel bei $x = \pm\sqrt{0,5}$.
6. Symmetrie zur y-Achse wegen f(–x)=f(x), außerdem strebt der Graph links und rechts asymptotisch von oben gegen die x-Achse, weil $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +0$.

Bild des Graphen:

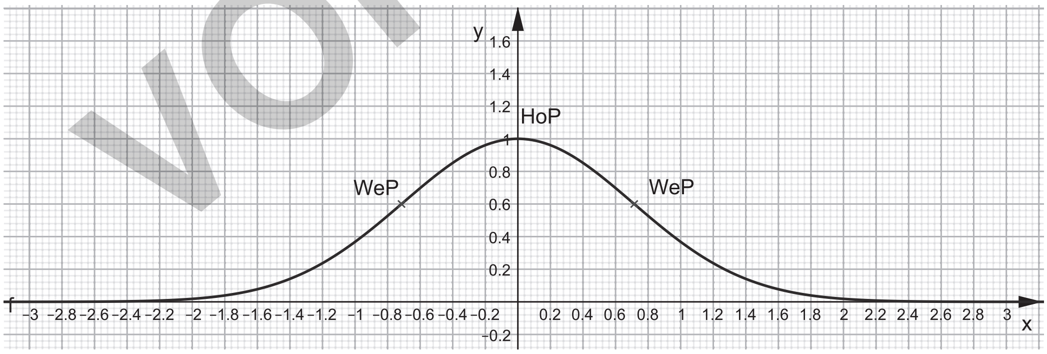


Abb. 12, Grafik: Florian Borges

Aufgabe

Diskutieren Sie nach diesem Schema folgende Funktionen. Skizzieren Sie dann den Graphen:

a) $g_1(x) = x \cdot e^{-x^2}$

b) $g_2(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

c) $g_3(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

M 7 Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!

Hinweis:
Sie überlegen zunächst ohne das CAS von *GeoGebra* oder GTR.
Wenn Sie nicht zurechtkommen, können Sie sich dieses Hilfsmittel zunutze machen.

Aufgaben

1. Gegeben sind die Graphen der Funktionen

$$f(x) = \sin(x^2),\ g(x) = \ln(2 + x^2) \text{ und } h(x) = \frac{x^2}{x^2+1} + 1.$$

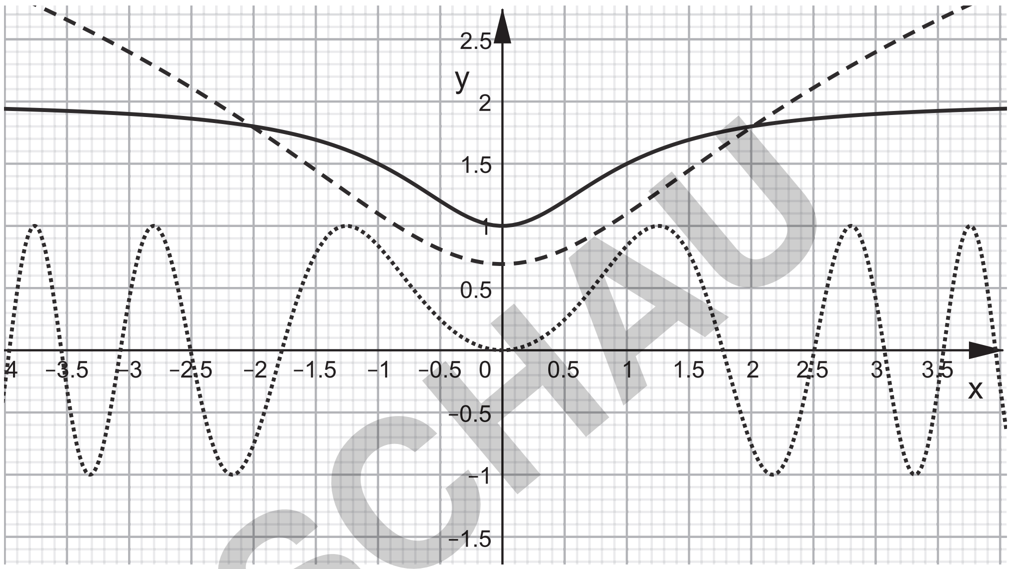


Abb. 13, Grafik: Florian Borges

a) Ordnen Sie die Funktionsnummern den Graphen zu.
b) Zeigen Sie, dass alle drei Funktionsgraphen symmetrisch zur y-Achse verlaufen.
c) Markieren Sie in den Graphen näherungsweise die Wendestellen (ohne Rechnung).

2. Durch die Funktion $g(x) = 5x \cdot e^{-0{,}2x}$ wird der zeitliche Verlauf der Konzentration eines Medikaments im Blut beschrieben.
Hinweis:
x ist die vergangene Zeit in Stunden seit Verabreichung,
g(x) ist die Konzentration in Milligramm je Liter.
a) Bestimmen Sie für $x > 0$ den Kurvenverlauf und zeichnen Sie den Graphen von g.
b) Das Medikament wirkt erst ab 4 mg je Liter. Bestimmen Sie den Zeitraum der Wirksamkeit zeichnerisch an G_g und versuchen Sie das Ergebnis auch rechnerisch zu ermitteln.
c) Nach welcher Zeit hat das Medikament seine höchste Konzentration erreicht?
d) Berechnen Sie den Zeitpunkt stärkster Abnahme und deren Wert.

3. Bestimmen Sie die Polynomfunktion h(x) dritten Grades, deren Graph einen WeP bei (1|1), einen HoP bei (2|2) und einen TiP bei (0|0) besitzt.
Weisen Sie zudem die Punktsymmetrie des Graphen zu (1|1) nach.