

Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



© Peter M Fisher, The Image Bank, Getty Images Plus

Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren und Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen – mit diesem Stationenzirkel bereiten sich Ihre Schüler ideal auf das Abitur vor. Die Übungsaufgaben variieren im Schwierigkeitsgrad. Sie können sie im Sinne einer Binnendifferenzierung gezielt einsetzen, um sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstärkere Schüler ideal zu fördern.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Peter M Fisher, The Image Bank, Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Lektorat: Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Oberstufe (Niveau)

Dr. Jürgen Leitz, Hamburg

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Hinweise	1
M 1 Lineare Gleichungssysteme (LGS) – Info	4
M 2 Verfahren zum Lösen eines LGS – Info	5
M 3 Einsetzungsverfahren	6
M 4 Gleichsetzungsverfahren	7
M 5 Additions- bzw. Subtraktionsverfahren	8
M 6 LGS in Matrix-Vektor-Form	9
M 7 Das Gauß-Verfahren – Info	10
M 8 Das Gauß-Jordan-Verfahren	11
M 9 Wiederholung zu LGS	12

VORSCHAU

M 10 Kollinearität und Komplanarität	13
M 11 Komplanarität	14
M 12 Wiederholung zu Kollinearität und Komplanarität	15
M 13 Lagebeziehungen zw. Punkten, Geraden und Ebenen	16
M 14 Wiederholung zu Lagebeziehungen	17
Stationenzirkel (4 Stationen als LEKs)	20–23
Tippkarten zum Stationenzirkel	24
Lösung Wiederholungsaufgaben	31
Lösung Stationenzirkel	37

Die Schüler lernen:

Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Kollinearität und Komplanarität von Vektoren und Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen – mit diesem Stationenzirkel bereiten sich Ihre Schüler ideal auf das Abitur vor. Die Übungsaufgaben variieren im Schwierigkeitsgrad. Sie können sie im Sinne einer Binnendifferenzierung gezielt einsetzen, um sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstärkere Schüler ideal zu fördern.

Lernzirkel zur Analytischen Geometrie

Fachwissenschaftliche Einordnung

Lineare Gleichungssysteme (LGS) sind aus der Medizin, der Technik sowie aus den Natur- und Wirtschaftswissenschaften einschließlich ihrer Anwendungsgebiete nicht wegzudenken und nehmen dort einen festen Platz ein. Sie sind als Hilfsmittel bei der Lösung komplexer Problemstellungen von großer Bedeutung. Zum Beispiel spielt die computerbasierte Lösung großer LGS bei der Computertomografie in der Medizin eine elementare Rolle, denn die dabei erzeugten Schnittbilder entstehen nicht sofort optisch, sondern müssen aus den gemessenen Rohdaten rekonstruiert werden. In der Mathematik finden LGS u. a. Anwendung bei der Prüfung von Vektoren auf lineare Abhängigkeit und Komplanarität, bei der Untersuchung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen sowie bei der Umwandlung von Darstellungsgleichungen für Ebenen.

Methodisch-didaktische Hinweise

Die vorliegende Unterrichtseinheit ist für ca. sechs Unterrichtsstunden vorgesehen. Den Schwerpunkt der Einheit bildet die Lösung linearer Gleichungssysteme bei der Untersuchung von Vektoren auf Kollinearität und Komplanarität und bei der Bestimmung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Die Schüler besitzen bereits Kenntnisse über Kollinearität und Komplanarität von Vektoren, über mögliche Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten (Punkten, Geraden, Ebenen) sowie über LGS (s. a. Voraussetzungen).

In der ersten Doppelstunde wiederholen die Schüler dazu bereits bekanntes Wissen über Kollinearität und Komplanarität von Vektoren, über Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen sowie über lineare Gleichungssysteme. Dies geschieht im geführten Unterrichtsgespräch mithilfe von Informationsblättern bzw. davon angefertigten Folien.

Zur Übung und Festigung sowie als Lernerfolgskontrolle erfolgt die Bearbeitung entsprechender Aufgaben in Form eines Lernzirkels, der aus den vier Stationen „LGS 1“ (Station 1), „LGS 2“ (Station 2), „LGS 3“ (Station 3) und „LGS 4“ (Station 4) besteht. Jede Station enthält zwei Aufgaben. Bei Aufgabe 1 sind Vektoren auf lineare Abhängigkeit (Kollinearität bzw. Komplanarität) zu untersuchen. Bei der Lösung von Aufgabe 2 müssen die Schüler jeweils ihre Kenntnisse über Lagebeziehungen von Punkt /Gerade, Punkt /Ebene, Gerade /Gerade, Gerade /Ebene und Ebene /Ebene anwenden. Station 1 und 2 beinhalten jeweils noch eine dritte Aufgabe zur Anwendung von LGS in der Analytischen Geometrie, und zwar die Umwandlung von Parametergleichungen in Koordinatengleichungen. Diese Aufgaben sind optional, falls noch Zeit bleibt.



Die Schüler arbeiten wegen der Ansteckungsgefahr während der Corona-Pandemie in Einzelarbeit bzw. allenfalls mit einem Partner zusammen. Der Lernzirkel sieht vor, dass jede Station von jedem Schüler in je einer Unterrichtsstunde durchlaufen wird. Je nach Leistungsstärke der Schüler kann diese Zeit auch verkürzt werden. Aufgaben, die nicht geschafft werden, sind zu Hause fertigzustellen.



Tippkarten bieten Hinweise zum Lösen jeder Aufgabe. Sie stellen Lösungshinweise dar, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Die Schüler können hier nachlesen, wenn sie nicht wissen, wie sie mit der Lösung einer Aufgabe beginnen sollen. Zu einigen Aufgaben gibt es mehrere Hinweise und Tipps. Die Schüler sollen hier nach dem Lesen eines Tipps nochmals nachdenken, ob sie nun einen Lösungsweg finden, bevor sie den nächsten Tipp lesen. Ausführliche Lösungen der Aufgaben liegen am Lehrerpult aus, sodass die Schüler ihre Rechnungen und Ergebnisse nach Beendigung einer Station überprüfen können.

Voraussetzungen

- Kollinearität, Linearkombination und Komplanarität von Vektoren
- Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten (Punkte, Geraden und Ebenen) im zwei- und dreidimensionalen Raum
- Äquivalenzumformungen bei Gleichungen
- Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit zwei und mehr Variablen
- Homogene und inhomogene LGS
- Unter- und überbestimmte LGS

M 1 Lineare Gleichungssysteme (LGS) – Info

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit mindestens einer Variablen

Die Gleichung $7x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 10$ ist eine **lineare Gleichung**, weil die Variablen x_1, x_2, x_3 nur in der ersten Potenz vorkommen. Die Zahlen 7, -8 und 9 heißen **Koeffizienten** (Beizahlen) der Variablen x_1, x_2, x_3 . Die Zahl 10 (rechte Seite der Gleichung) ist das sogenannte **absolute Glied** der Gleichung.

Ein LGS besteht aus m Gleichungen mit $m \geq 2$ und n Variablen $n \geq 1$.

$$\begin{array}{rcll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Die **Lösungsmenge** L eines LGS mit $n \geq 1$ Variablen ist ein n -Tupel von Elementen, das alle Gleichungen des LGS erfüllt. Ein n -Tupel ist hier eine geordnete Liste von n Zahlen,

z. B. für drei Zahlen: $(5 | 3 | 2)$ oder auch in Vektorform: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sind die absoluten Glieder b_1, b_2, b_3, \dots alle gleich null, dann nennt man das LGS **homogen**, ansonsten heißt es **inhomogen**.

Ein Gleichungssystem heißt **unterbestimmt**, wenn es weniger Gleichungen als Variablen hat ($m < n$). Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Variablen heißt **überbestimmt** ($m > n$).

M 2 Verfahren zum Lösen eines LGS – Info

Äquivalenzumformungen

LGS haben stets entweder eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen. Zur **eindeutigen Lösung** eines LGS mit n Variablen sind mindestens n voneinander unabhängige Gleichungen notwendig. Zwei Gleichungen sind unabhängig, wenn sie nicht äquivalent zueinander sind.

Ein unterbestimmtes Gleichungssystem kann keine eindeutige Lösung haben, es hat entweder unendlich viele Lösungen (eine oder mehrere Variablen sind von einer frei wählbaren Variablen abhängig) oder keine Lösung. Beim überbestimmten Gleichungssystem ist nach Ermittlung der Lösung aus einigen Gleichungen noch zu überprüfen, ob diese auch alle weiteren Gleichungen, die nicht zur Ermittlung der Lösung beitragen, erfüllt.



Zum Ermitteln der Lösungsmenge (rechnerisch) sind folgende **Äquivalenzumformungen** anzuwenden:

1. Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen
2. Multiplikation beider Seiten einer Gleichung mit einer von null verschiedenen Zahl
3. Addition (Subtraktion) des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen

Bei der Untersuchung der Lagebeziehungen von zwei geometrischen Objekten (Punkt / Gerade / Ebene) kommen LGS mit einer oder mehreren Variablen vor. Zum Lösen dieser LGS gibt es verschiedene Verfahren, die vom jeweiligen LGS abhängig sind. Für LGS mit einer und zwei Variablen eignen sich insbesondere das **Einsetzungs-, Gleichsetzungs-**



und **Additions- bzw. Subtraktionsverfahren**. LGS mit drei und mehr Variablen löst man besser mit dem **Gauß-Verfahren** oder dem **Gauß-Jordan-Verfahren**.

M 3 Einsetzungsverfahren

Eine Gleichung des LGS wird nach einer der Variablen (oder einem geeigneten Vielfachen davon) aufgelöst (umgeformt). Anschließend wird diese neue Gleichung in die andere Gleichung eingesetzt. Dadurch erhält man eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel:

Gegeben sei das LGS:

$$I \quad 2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$II \quad 2x_1 - x_2 = 4$$

$$\text{Aus II} \quad 2x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow \text{III} \quad x_2 = 2x_1 - 4$$

III in I einsetzen:

$$2x_1 + 3 \cdot (2x_1 - 4) = 12$$

$$2x_1 + 6x_1 - 12 = 12$$

$$8x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 3$$

$x_1 = 3$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen ergibt $x_2 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 2)\}$.

Möglich wäre auch:

$$\text{Aus II} \quad 2x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow \text{III}' \quad 2x_1 = 4 + x_2$$

III' in I einsetzen:

$$4 + x_2 + 3x_2 = 12 \Leftrightarrow 4x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$$

$x_2 = 2$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen liefert $x_1 = 3$.

Damit lautet auch auf diesem Weg die Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 2)\}$.

M 4 Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen (oder einem geeigneten Vielfachen) aufgelöst. Durch Gleichsetzung erhält man dann eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel:

Gegeben sei wieder das LGS:

$$\text{I } 2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$\text{II } 2x_1 - x_2 = 4$$

$$\text{Aus I } 2x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow \text{III } 2x_1 = 12 - 3x_2$$

$$\text{Aus II } 2x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow \text{IV } 2x_1 = 4 + x_2$$

Gleichsetzen von III und IV:

$$12 - 3x_2 = 4 + x_2 \Leftrightarrow 8 = 4x_2 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$x_2 = 2 \text{ in IV einsetzen: } \Rightarrow x_1 = 3$$

Damit lautet die Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 2)\}$.

M 5 Additions- bzw. Subtraktionsverfahren

Durch Multiplikation (oder Division) einer Gleichung (oder beider Gleichungen) schafft man entgegengesetzte gleiche (oder identische) Koeffizienten einer Variablen. Bei Addition (Subtraktion) beider Gleichungen fällt dann eine Variable heraus und man erhält eine Gleichung mit nur noch einer Variablen.

Beispiel 1:

Gegeben sei wieder das LGS:

$$I \quad 2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$II \quad 2x_1 - x_2 = 4$$

Die Subtraktion I – II liefert: $4x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 2$.

$x_2 = 2$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen liefert $x_1 = 3$.

Damit lautet die Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 2)\}$.

Beispiel 2:

Gegeben sei das LGS:

$$I \quad 5x_1 + 3x_2 = 21$$

$$II \quad 7x_1 + 8x_2 = 37$$

Gleichung I wird mit 8 multipliziert und Gleichung II mit (-3) und es ergibt sich:

$$III \quad 40x_1 + 24x_2 = 168$$

$$IV \quad -21x_1 - 24x_2 = -111$$

Die Addition III + IV liefert: $19x_1 = 57 \Rightarrow x_1 = 3$.

$x_1 = 3$ in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen ergibt $x_2 = 2$.

Damit lautet die Lösungsmenge $L = \{(3 \mid 2)\}$.



Hinweis:

Die Addition (Subtraktion) zweier Gleichungen findet des Weiteren Anwendung beim Lösen von LGS mit mehr als zwei Variablen mithilfe des Gauß-Verfahrens.

M 7 Das Gauß-Verfahren – Info

Das Gauß-Verfahren

Zur Lösung des LGS wandelt man die Koeffizientenmatrix A innerhalb der erweiterten Koeffizientenmatrix (A | b) durch elementare Zeilenumformungen in eine **obere Dreiecksmatrix** um. Eine obere Dreiecksmatrix ist eine quadratische Matrix, deren Einträge unterhalb ihrer **Hauptdiagonale** alle null sind. Dabei ist es eventuell sinnvoll, die Gleichungen zunächst zu vertauschen. Die Lösungswerte ergeben sich dann schrittweise durch Auflösen der letzten Gleichungen von unten nach oben.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{I} \cdot (-2) \xrightarrow{\quad} + \\ \text{I} \cdot (-3) \xrightarrow{\quad} + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & -7 & 6 & 4 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{I} \cdot (-7) \xrightarrow{\quad} + \\ \text{I} \cdot 4 \xrightarrow{\quad} + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{IV} \\ \text{VI} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right)$$

Aus VI folgt:

$$-11x_3 = -33 \Leftrightarrow x_3 = 3$$

$x_3 = 3$ in IV:

$$-4x_2 + 5 \cdot 3 = 7 \Leftrightarrow -4x_2 = -8 \Leftrightarrow x_2 = 2$$

$x_2 = 2$ und $x_3 = 3$ in I einsetzen:

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow x_1 - 2 = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$$

Somit lautet die Lösung des LGS: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

M 9 Wiederholung zu LGS

Aufgabe Wh1

Prüfen Sie, ob das LGS lösbar ist. Wenn ja, geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\text{I} \quad 3x_1 - 4x_2 = 10$$

$$\text{II} \quad -2x_1 - 3x_2 = -1$$

Aufgabe Wh2

Gegeben ist folgendes LGS:

$$\text{I} \quad 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10$$

$$\text{II} \quad \quad \quad 3x_2 - 4x_3 = 2$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 = 4$$

- Geben Sie das LGS in Matrix-Vektor-Form an.
- Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mit dem Gauß-Verfahren.



Aufgabe Wh3

Lösen Sie das LGS aus Aufgabe Wh2 mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

M 11 Komplanarität

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im dreidimensionalen Raum heißen genau dann *komplanar*, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt:

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}.$$

Geometrisch bedeutet das, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

Alternativ gilt für die Überprüfung auf Komplanarität folgendes Kriterium:

Drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind genau dann komplanar, wenn es drei reelle Zahlen r , s und t gibt, sodass gilt:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \text{ mit } r, s, t \neq 0.$$

Existiert für die Vektorgleichung nur die triviale Lösung $r=s=t=0$, so sind die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} nicht komplanar.

Beispiel:

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ komplanar?

Lösung:

$$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Vektorgleichung}$$

Aufspalten \Rightarrow LGS:

$$\text{I} \quad -2r + 2s = 2$$

$$\text{II} \quad 3r - s = 1$$

$$\text{III} \quad r + s = 3$$

$$\text{II} + \text{III} \Rightarrow 4r = 4 \Rightarrow r = 1$$

$$r = 1 \text{ in III einsetzen: } 1 + s = 3 \Rightarrow s = 2.$$

$$r = 1 \text{ und } s = 2 \text{ zur Überprüfung in I einsetzen: } -2 + 4 = 2 \text{ (wahr).}$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit nicht-trivialer Lösung.

\Rightarrow Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind komplanar.

M 13 Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Punkte

Die Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden bzw. Ebene kann man mithilfe der **Punktprobe** feststellen:

Man setzt die Koordinaten des Punktes in die Geraden- bzw. Ebenengleichung ein und überprüft, ob die Gleichung erfüllt wird. Wenn die Gleichungen in Parameterform vorliegen, dann erfolgt die Prüfung durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems, das man durch Aufspalten der Vektorgleichung erhält.

Gerade / Gerade – Gerade / Ebene – Ebene / Ebene

Die Lagebeziehung zweier geometrischer Objekte (Geraden oder Ebenen) kann algebraisch durch **Gleichsetzen** der beiden Gleichungen bestimmt werden (Schnittpunktbestimmung). Je nach Art der geometrischen Objekte kann das LGS über- bzw. unterbestimmt sein. Über die Lösung des LGS kann man dann eine Aussage zur gegenseitigen Lage der geometrischen Objekte machen.

Untersucht man die Lagebeziehung zweier Geraden und es liegt kein Schnittpunkt vor, müssen zusätzlich die Richtungsvektoren der Geraden auf lineare Abhängigkeit geprüft werden, um entscheiden zu können, ob die Geraden parallel oder windschief zueinander sind.

c) Gerade / Gerade in der Ebene

Die beiden Geradengleichungen werden _____. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein _____ mit _____ Gleichungen und _____ Variablen. Die beiden Geraden schneiden einander in einem Punkt, wenn das LGS _____ Lösung hat. Sie sind _____ (fallen zusammen), wenn das LGS _____ viele Lösungen besitzt. Wenn das LGS nicht _____ ist, dann sind die Geraden _____ zueinander.

d) Gerade / Gerade im dreidimensionalen Raum

Die beiden Geradengleichungen werden _____. Aufspalten der Vektorgleichung liefert ein _____ mit _____ Gleichungen und _____ Variablen. Das LGS ist _____ bestimmt. Die gefundene Lösung muss _____ Gleichungen erfüllen. Die beiden Geraden schneiden einander in einem Punkt, wenn das LGS _____ Lösung hat. Sie sind _____ (fallen zusammen), wenn das LGS _____ viele Lösungen besitzt. Wenn das LGS nicht _____ ist, dann schneiden sich die Geraden nicht und ihre _____ müssen zusätzlich auf lineare _____ geprüft werden. Sind die Richtungsvektoren linear _____, dann sind die Geraden _____ zueinander, ansonsten sind sie _____ zueinander.

Station 1: LGS 1 mit einer Variablen – LEK



Aufgabe 1

Stellen Sie fest, ob die beiden Vektoren kollinear (linear abhängig) oder nicht kollinear sind.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ -2,0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ -3,6 \\ -2,4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt, die durch A und B geht.

- | | | |
|-------------------|----------------|---------------|
| a) A(2 3), | B(5 1), | P(1 3) |
| b) A(3 2), | B(-1 3), | P(-1 3) |
| c) A(2 1 3), | B(1 0 2), | P(4 3 5) |
| d) A(-1 0 2), | B(0 -2 3), | P(0 -2 1) |



Aufgabe 3

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Form $a x_1 + b x_2 = c$ für die Gerade g mit folgender Parametergleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$