Algebra

Eine Grundvorstellung vom Funktionsbegriff entwickeln – Modul O

Tom Bauernfeind, Dortmund
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

© Gorfer/iStock/Getty Images Plus

Der Funktionsbegriff ist grundlegend für die Mathematik. Deshalb setzen sich Ihre Schüler in diesem Beitrag mit verschiedenen Darstellungsweisen von Funktionen auseinander, berechnen Funktionsterme, lösen Funktionsgleichungen und üben den Darstellungswechsel.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	9 (G8)/10 (G9), zu Beginn der Einführungsphase
Dauer:	je nach Einsatz, ca. 7 Doppelstunden für die Bearbeitung aller vier Module (die restlichen Module finden Sie auf **CD-ROM 78**)
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Thematische Bereiche:	Diagnose des Grades des Verständnisses von Grundvorstellungen zu Funktionen; Grundsätzliches zum Funktionsbegriff; Darstellungsweisen von Funktionen; Funktionsterme; Funktionsgleichungen; Berechnen von Funktionswerten; Darstellungswechsel
Zusatzmaterialien:	Module B, K und Z auf **CD-ROM 78**

Didaktisch-methodische Hinweise

Einführung: die Objektvorstellung

Bei der Frage danach, welchen Wert eine Funktion einem Ausgangswert zuordnet, betrachtet man nur eine bestimmte Stelle (einen x-Wert) – blickt also ganz lokal auf die Funktion (Zuordnungsaspekt [Modul Z]). Bei der Frage nach dem Veränderungsverhalten rückt man immer einen bestimmten Bereich (ein Intervall) in den Fokus (Kovariationsaspekt [Modul K]). Darüber hinaus macht es in vielen Zusammenhängen Sinn, die Funktion „als Ganzes“ zu betrachten.

Dieses „Ganze“, die Funktion als Objekt, das in verschiedenen Darstellungen auftauchen kann, gibt Aufschluss über globalere, also allgemeinere Sichtweisen auf den durch die Funktion beschriebenen Zusammenhang. Man kann sich so leicht einen Überblick über den Zusammenhang verschaffen.

Hierbei spielen natürlich der Zuordnungs- und der Kovariationsaspekt (Module Z und K) mit hinein, jedoch kann man die Funktion als Objekt erst dann richtig verstehen und deuten, wenn man den Zuordnungs- und den Kovariationsaspekt verstanden hat.

Eine Funktion kann in all ihren Darstellungsformen als Ganzes bzw. Objekt angesehen werden. Im Folgenden dienen die grafische Darstellung, die Darstellung als Diagramm sowie die algebraische Darstellung zur Verdeutlichung.

Beispiele

1. Betrachtet man den Graphen (Abb. 1) der Funktion
   Entfernung von der Start-/Ziellinie (in km) $\longrightarrow$ Geschwindigkeit (in km/h)
   als Ganzes, ohne auf bestimmte Werte oder bestimmte Veränderungen zu schauen, so kann man auf einen Blick den Geschwindigkeitsverlauf erkennen.

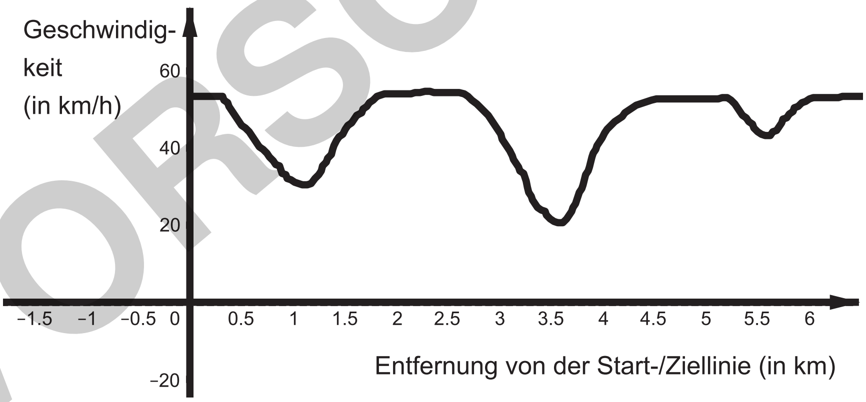


Abb. 1: Geschwindigkeitsverlauf

   Man bemerkt sofort die (nahezu) waagerechten Verläufe, an denen sich die Geschwindigkeit nicht ändert, sowie die drei „Täler“, in denen die Geschwindigkeit kurzzeitig geringer ist. So hat man einen direkten Eindruck vom Verlauf der Geschwindigkeit auf der Rennstrecke.

2. Möchte man sich einen Überblick über die Temperaturentwicklung an einem Tag verschaffen (Abb. 2 auf der nächsten Seite) , so macht es zu Beginn wenig Sinn, einzelne Temperaturen in den Blick zu nehmen oder zu schauen, zu welchen Zeitpunkten die Temperatur am schnellsten stieg oder sank.

Ein Blick auf den Gesamtverlauf, das Ganze, liefert einen besseren Erst- bzw. Gesamteindruck. Einzelne weitere Aspekte wie Temperaturen zu bestimmten Zeitpunkten (Modul Z) oder verschiedene Temperaturveränderungen zu betrachten (Modul K), macht oft erst auf Grundlage des Eindrucks der ganzen Funktion Sinn.

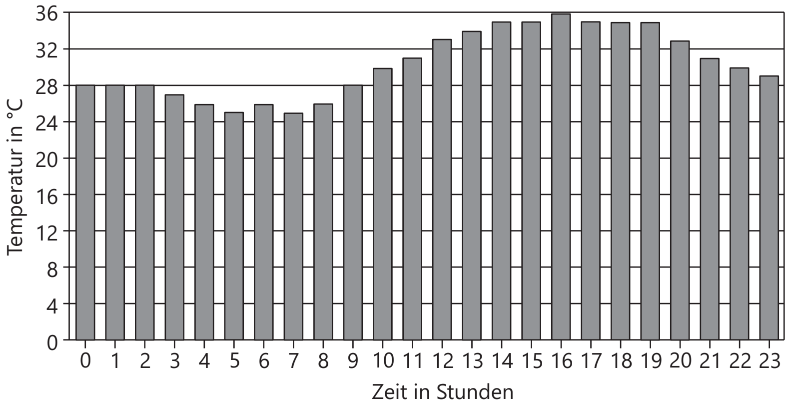


Abb. 2 – Temperaturverlauf innerhalb eines Tages; Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

3. Auch bei der Frage nach der Entwicklung von Börsenkursen lässt die Übersicht über den Gesamtverlauf erste Aussagen über den Verlauf des DAX zu (Abb. 3). Man erkennt direkt den Verlauf des Kurses. Erst in einem zweiten Schritt kann man interessante Punkte ablesen oder Veränderungen betrachten.

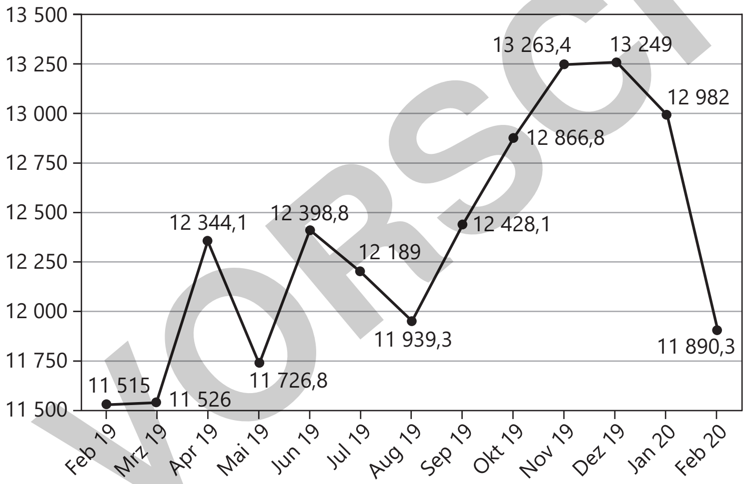
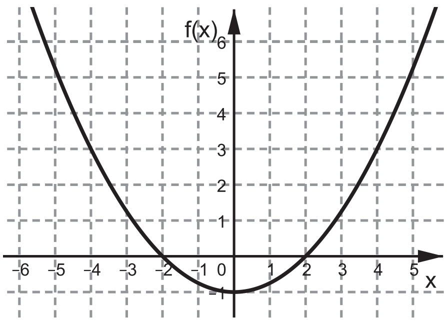


Abb. 3 – Börsenkurs; Grafik: Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

4. Mit dem Wissen über quadratische Funktionen hat man sofort ein Bild von der Zuordnung, die durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ angegeben wird.
So weiß man z. B. sofort, dass es einen kleinsten Funktionswert und damit einen „tiefsten Punkt" gibt (hier der Scheitelpunkt) und dass die Funktion kleinen und großen Ausgangswerten jeweils große Funktionswerte zuordnet, also ihr Graph „von oben links kommt" und „nach oben rechts geht". Man weiß ferner auch, dass die Funktion eine Symmetrie aufweist.



Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen
Ab = Arbeitsblatt, LEK = Lernerfolgskontrolle

1./2. Stunde

Thema: **Der Funktionsbegriff: die Funktion als Ganzes**

M 1 (Ab) Einstiegsaufgaben
M 2 (Ab) Vertiefungsaufgaben
M 3 (LEK) Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen!

Benötigt:
- ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
- ☐ Einführungstext zur Objektvorstellung (**CD-ROM 78**)

Minimalplan

Je nach Intention, Bedarf oder zeitlichen Aspekten kann dieses Modul isoliert bearbeitet werden. In diesem Falle ist die Bearbeitung in Form von Hausaufgaben oder innerhalb von zwei Doppelstunden im Unterricht denkbar.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K1, K4, K5	L4	... analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale), ... erkennen die trigonometrischen Funktionen als Möglichkeit der Beschreibung von periodischen Vorgängen, ... betrachten und interpretieren den Gesamtverlauf von Funktionen.	I – II, z. T. III

Einstiegsaufgaben

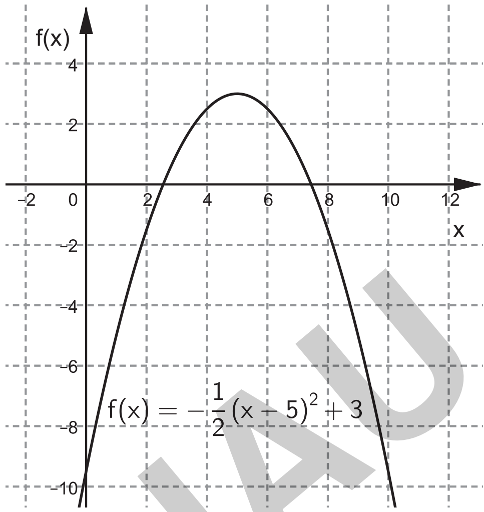
M 1

Aufgabe 1

Gegeben ist eine lineare Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3x + 5$.
Was können Sie über den Verlauf der Funktion aussagen?

Aufgabe 2

Eine Funktion f ist gegeben durch ihren Graphen und ihre Funktionsvorschrift.
Beschreiben Sie den Verlauf der Funktion.

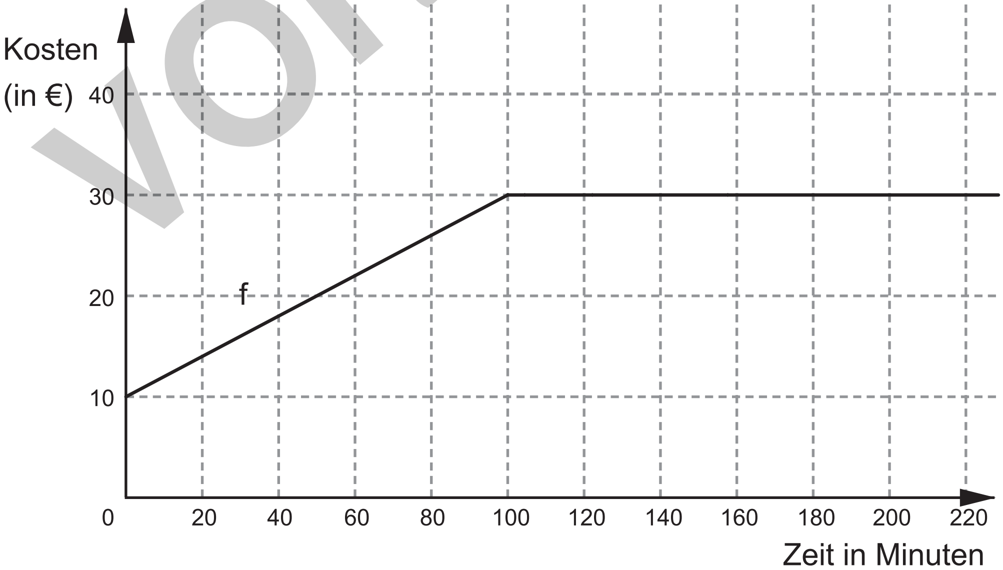


Aufgabe 3

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen der Gesprächsdauer eines Telefonats (in Minuten) und den anfallenden Kosten (in €) eines bestimmten Handytarifs. Im Folgenden sehen Sie den Graphen der Funktion.

a) Was können Sie anhand des Graphen über den Tarif aussagen?

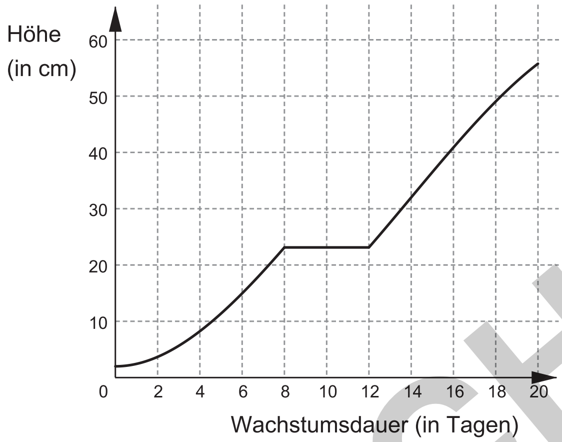
b) Wieso ist dieser Tarif für einen Vieltelefonierer günstiger als ein Tarif, der durch die lineare Funktion $g(x) = 0{,}1x + 5$ beschrieben wird?



M 2 Vertiefungsaufgaben

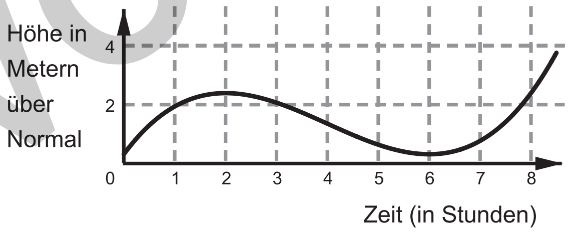
Aufgabe 1

Für ein Referat im Fach *Biologie* beobachtet ein Schüler täglich das Wachstum einer Pflanze in einem Gewächshaus. Er notiert dazu ihre Blütenhöhe. Der Schüler hat erkannt, dass sich die Höhe der Blüte während seiner Beobachtung gut durch eine Funktion h beschreiben lässt.
Dabei bezeichnet t die Anzahl der Tage, die seit dem Beobachtungsbeginn vergangen sind, und $h(t)$ die Höhe der Blüte in cm.
Der Graph von h ist in der folgenden Abbildung dargestellt.
Was lässt sich über den Wachstumsverlauf der Pflanze im Beobachtungszeitraum im Allgemeinen aussagen?



Aufgabe 2

Für Menschen in Hochwassergebieten ist es wichtig, sich gut auf erwartete Hochwasser vorbereiten zu können. Dazu werden Prognosen zu Messständen gegeben. Diese geben an, wann der Wasserstand wie hoch sein wird. Im Folgenden ist der Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit für die nächsten 8,5 Stunden dargestellt. Beschreiben Sie den Verlauf des Hochwassers.



Aufgabe 3

Was kann man über den Verlauf einer

a) linearen Funktion

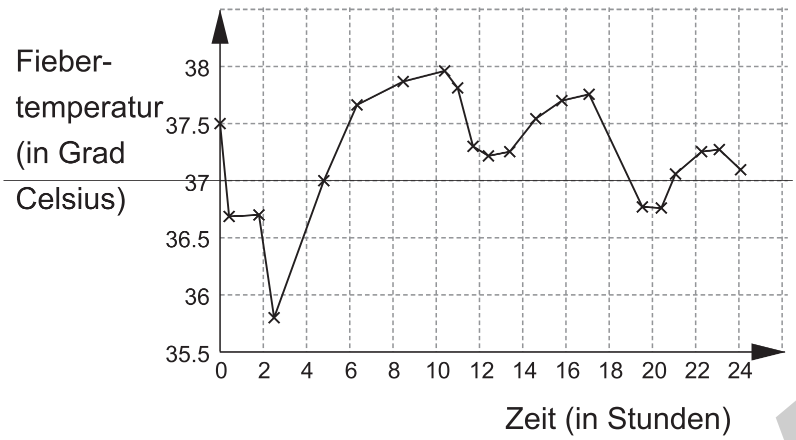
b) einer quadratischen Funktion

aussagen?

Sind Sie fit? – Testen Sie Ihr Wissen! M 3

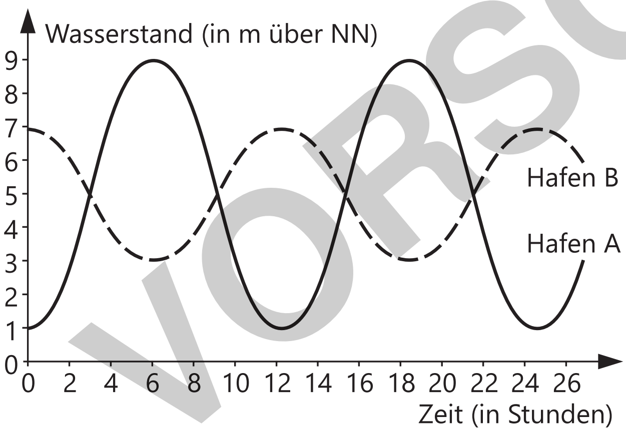
Aufgabe 1

Der Verlauf der Fieberkurve (grafische Darstellung der Fiebertemperatur in °C in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden) kann Hinweise auf die Ursache (z. B. Krankheitserreger) geben.
Beschreiben Sie die gegebene Fieberkurve.



Aufgabe 2

Der Verlauf von Ebbe und Flut in den Häfen A und B ist nebenstehend anhand der Wasserstandsverläufe grafisch dargestellt. Vergleichen Sie die Verläufe stichpunktartig.



Aufgabe 3

Eine beliebige Funktion f sei gegeben. (Sie können sich also eine beliebige Funktion denken. Diese darf jedoch nicht konstant sein (vgl. Modul K)).

a) Beschreiben Sie, wie sich die folgenden Veränderungen auf die Funktion auswirken.
Zu f(x) wird 3 hinzuaddiert, d. h., es entsteht eine neue Funktion $g(x)$ mit $g(x) = f(x) + 3$.
Beispiel: $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 + 3$

b) $f(x)$ wird mit –1 multipliziert, d. h., es entsteht eine neue Funktion $g(x)$ mit $g(x) = -f(x)$.
Beispiel: $f(x) = 3x^2$, $g(x) = -3x^2$