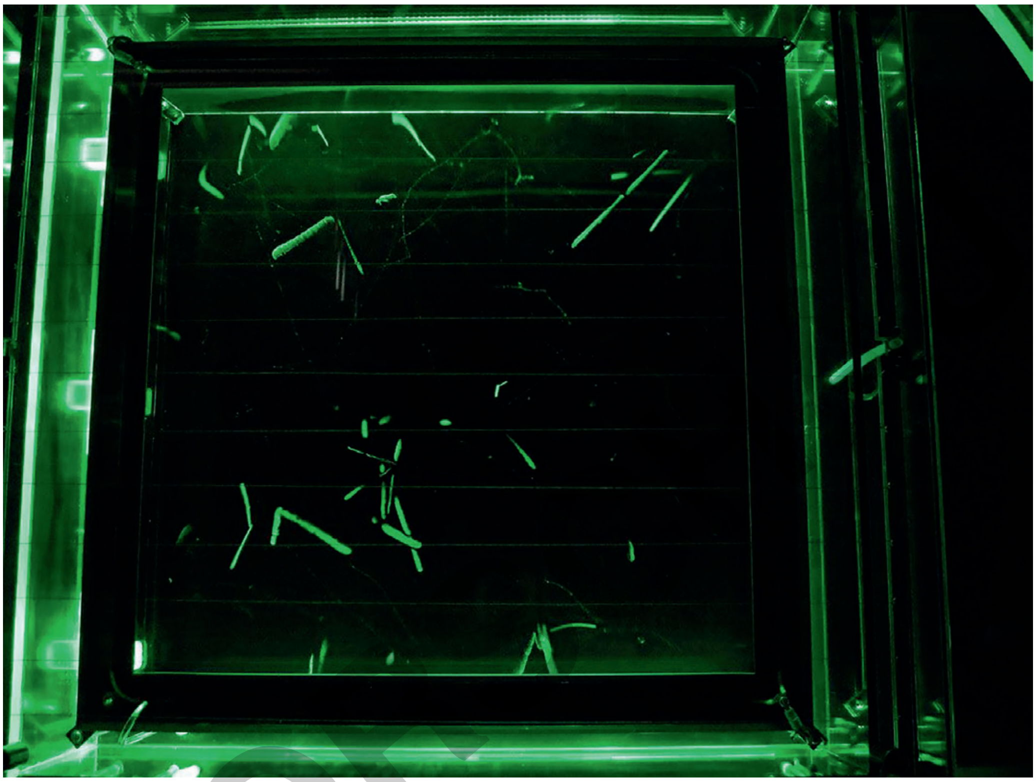
Thermodynamik

Teilchenstrahlen in Gasen

Gerhard Deyke, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



Eine Nebelkammer ist meist mit einem übersättigten Luft-Alkohol-Gemisch gefüllt. Wenn ein energiereiches, geladenes Teilchen das Gas durchquert, erzeugt es durch Stoßionisation zahlreiche Ionen, die einzeln als Kondensationskerne für die Bildung feinster Tröpfchen verantwortlich sind. In ihrer Gesamtheit bilden sie eine sichtbare Spur, einen Kondensstreifen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	11 (G8), 12 (G9)
Dauer:	2 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	1. reproduzieren; 2. Lösungen berechnen; 3. argumentieren und diskutieren
Thematische Bereiche:	Kinetische Theorie der Wärme, Absorption in der Physik, Lösung einer einfachen Differenzialgleichung, Wahrscheinlichkeit, allgemeine Gasgleichung, Stoßquerschnitt, exponentielles Wachstum, Absorptionskoeffizient, mittlere freie Weglänge von Teilchen

Didaktisch-methodische Hinweise

Fachlicher Hintergrund

Schießt man einen Teilchenstrahl durch ein Gas, so verlässt der Strahl das Gas mit geringerer „Intensität" als derjenigen, mit der er in das Gas eintrat. Stellt man sich die (gleichartigen) Moleküle des Gases als Kugeln vom Radius R und die Teilchen (vielleicht selbst Moleküle) als Kugeln vom Radius r vor, so werden Kugeln der beiden voneinander verschiedenen Kugelsorten zusammenstoßen, was dafür sorgt, dass Strahlteilchen die Richtung des einfallenden Strahles verlassen. Von N auf das Gas treffende Teilchen scheiden ΔN aus, sodass es zu einer Verminderung der Teilchenzahldichte kommt, also zu einer „Intensitätsabnahme" des Strahles.

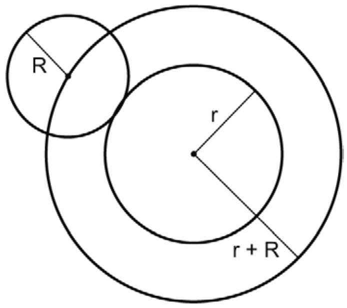


Abb.1
Grafik: Dr. W. Zettlmeier

In diesem Beitrag soll zunächst die „Intensitätsminderung" des Strahles untersucht werden. Wir gehen in einem ersten Modellierungsversuch von ruhenden Gasmolekülen aus. Ein Teilchen des Strahles scheidet aus, wenn es im durchquerten Gasvolumen zu einer Begegnung mit einem Gasmolekül innerhalb der Fläche A_s eines Kreises vom Radius $r+R$ kommt (sog. Stoßquerschnitt), wie man sofort der Abb. 1 entnimmt. Nach der Begegnung ist es so, als hätte das Gas das Teilchen verschluckt (absorbiert).

Der Teilchenstrahl durchquere ein quaderförmiges Gasvolumen der Länge Δx mit der Querschnittsfläche A (siehe Abb. 2).

In diesem Volumen ruhen z Moleküle. Die Wahrscheinlichkeit p für ein Zusammentreffen eines Strahlteilchens mit einem Molekül des Gases beträgt offenbar:

$$p = \frac{z \cdot A_s}{A} \qquad (1)$$

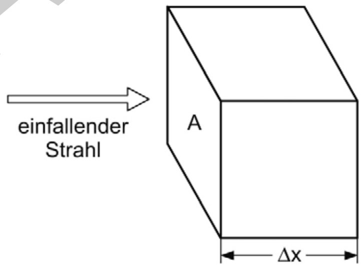


Abb.2
Grafik: Dr. W. Zettlmeier

Lehrplanbezug

Das vorgelegte Thema gehört sicherlich nicht zu den Pflichtinhalten in der Vorbereitung auf das zentrale schriftliche Abitur in Physik. Es hat aber durchaus seinen Platz in den Additiva und hat seinen eigenen Reiz. Stellvertretend für die verschiedenen Bundesländer kann Folgendes festgestellt werden: Der Hamburger „Bildungsplan gymnasiale Oberstufe" ist beispielsweise ein Rahmenplan, der viele Freiräume für inhaltliche Gestaltung zulässt. Er kennt „verbindliche Inhalte" und in der „Abitur-Richtlinie (2018)" ergänzende Sachgebiete, denen das vorliegende Thema zugeordnet werden kann. Dagegen ist der Bayerische „Lehrplan Physik" stark inhaltlich ausgerichtet. Er kennt jedoch zahlreiche „Lehrplanalternativen", z. B. Medizinphysik oder Astrophysik, in denen sich das hier angesprochene Thema wiederfinden lässt.

Hinweise zur Gestaltung des Unterrichts

Lernvoraussetzungen

Mit Rücksicht auf die Kürze der für diese Unterrichtseinheit eingeplanten Zeit sollten Ihre Schüler bereits mit den Grundaussagen der **kinetischen Gastheorie** vertraut sein, insbesondere mit der **Zustandsgleichung idealer Gase**. Ebenso sollten die Lernenden hier nicht zum ersten Male vor das Problem der **Lösung einer Differenzialgleichung** gestellt werden.

Gruppenarbeit als Unterrichtsmethode

Die Aufgabe ist besonders für die Bearbeitung in kleinen Teams geeignet. Lehrerpräsenz wäre gut, falls fachliche Beratung erforderlich wird. Auf Präsentation der Ergebnisse im Plenum sollte nicht verzichtet werden.

Denkbar ist aber auch der Einsatz der Aufgabe zum **selbstständigen Erarbeiten des Themas.**

Besuch eines Schoollabs oder des DESY / Hamburg

Dies ist eine theoretische Aufgabe. Eigene Experimente zum Inhalt des Themas lassen sich nicht in der Schule durchführen, sofern diese über keine Nebelkammer verfügt. Vielleicht aber kooperiert die Schule mit einer nahe gelegenen Universität oder einem entsprechenden physikalischen Institut, das ein **Schoollab** hat. In Hamburg beispielsweise wäre so etwas möglich mit den Universitäten oder auch einem Schülerlabor am **DESY**. Für die Schüler wäre eine derartige Aktivität natürlich ein Highlight.

Bibliografische Angaben

▶ ***Professor Dr. Dieter Meschede***: *Gerthsen Physik; 24. überarbeitete Auflage. Springer 2010*

Weiterführende Internetseiten

Wer sich zu den Themen „mittlere freie Weglänge“ und „Streuung von Teilchen“ umfassender informieren möchte, sei auf drei Internetseiten verwiesen.

Mittlere freie Weglänge und Streuung von Teilchen:

- *https://lp.uni-goettingen.de/get/text/4886*
  In dem Artikel wird die mittlere freie Weglänge berechnet. Schreibt man die entscheidende Differenzengleichung $\Delta N = N\, n\, \sigma\, \Delta x$ um, so erhält man daraus durch Integration die mittlere freie Weglänge.
- *https://www.spektrum.de/lexikon/physik/mittlere-freie-weglaenge/9840*
  Hier wird ein Überblickwissen über die mittlere freie Weglänge vermittelt unter Verzicht auf Herleitungen.
- *www.ieap.uni-kiel-de/et/people/wimmer/teaching/Phys_IV/P4_V3.pdf*
  Bei der Streuung eines Teilchens an einem anderen spielt die Wechselwirkung zwischen ihnen eine entscheidende Rolle. Dies ist ein sehr ausführlicher Artikel, der das Thema wissenschaftlich auslotet, bis hin zur Theorie der Magnetresonanztomografie (MRT).

Auf einen Blick

1./2. Stunde

Thema: Thermodynamik

M 1 (Ab) **Teilchenstrahlen in Gasen**

Benötigt:
- ☐ Taschenrechner
- ☐ Formelsammlung

Teilchenstrahlen in Gasen M 1

Aufgaben

1. Ist n die Molekülzahldichte im Gasvolumen (Anzahl der Moleküle pro Volumeneinheit), so gilt:
   $\Delta N = -n \cdot \Delta x \cdot A_S \cdot N$. (2)
   Begründen Sie Gleichung (2).
2. Die Abnahme der Teilchenzahl auf der Strecke Δx ist demnach zur Teilchenzahl N proportional. Ist die Schichtdicke Δx sehr klein, dann ist auch ΔN sehr klein und infolgedessen ist die Anzahl der aus der Schicht herauskommenden Teilchen annähernd so groß wie die Zahl der einfallenden Teilchen:
   $N - \Delta N \approx N$.
   Ferner ist dann $\frac{\Delta N}{\Delta x} \approx N'(x)$, wenn wir mit $N(x)$ die Zahl der Teilchen bezeichnen, die bereits im Gas die Strecke x zurückgelegt haben. $N'(x)$ ist dann die Ableitung von $N(x)$. Aus Gleichung (2) ergibt sich sofort die Differenzialgleichung:
   $N'(x) = -nA_S N(x)$. (3)
   Sie ist vom Typ
   $f'(x) = C \cdot f(x);\ C = \text{const.}$ (4)
   Zeigen Sie, dass
   $f(x) = f(0)e^{Cx}$ (5)
   eine Lösung der Differenzialgleichung (Gleichung 4) ist.
3. Gleichung (5) ist die typische Gleichung für exponentielles Wachstum. Viele Absorptionsvorgänge in der Physik wie Absorption von Licht oder Röntgenstrahlung in Materie werden so beschrieben.
   Geben Sie nun die Lösung der DGL (3) an.
4. In der Lösung von Gleichung (3) wird üblicherweise $n \cdot A_S = \alpha$ gesetzt. α heißt Absorptionskoeffizient. Er hängt lediglich von der Molekülzahldichte des Gases und dem Stoßquerschnitt der kollidierenden Stoßpartner ab.
   Die 3. entwickelte Lösung der Gleichung (3) ist jedoch nur relevant, wenn das Gas, durch welches der Strahl geschickt wird, einen sehr geringen Druck hat. Hat ein Gas die (absolute) Temperatur $T = 273\,K$ und steht es unter einem Druck von $p = 10^3\,mbar = 10^3\,hPa$, so beträgt nach der allgemeinen Gasgleichung $pV = \nu RT$ (ν ist die Stoffmenge und R die universelle Gaskonstante) seine Teilchenzahldichte $n \approx 2{,}7 \cdot 10^{25}$ Teilchen pro m^3. Damit wird $-\alpha$ sehr klein und $e^{-\alpha x}$ strebt gegen 0, d. h., dass das Gas für die Teilchen undurchlässig ist.
   Aus der Messung von α kann auf den Stoßquerschnitt A_S der beteiligten Teilchen geschlossen werden bzw. auf die Summe ihrer Kugelradien. Für Silberatomstrahlen, welche in Stickstoff eingeschossen wurden, ergab sich auf diese als Summe der Radien von Ag und N_2
   $r + R = 2{,}58 \cdot 10^{-10}\,m$.

Lösungen

1. Da ΔN eine „Abnahme" ist, gilt:

   a) $-\frac{\Delta N}{N} = p$.

   Weiter ist definitionsgemäß $n = \frac{z}{\Delta x A}$, also $z = n\Delta x A$. Aus (a) und (1) ergibt sich auch:

   $-\frac{\Delta N}{N} = \frac{zA_S}{A} = \frac{n\Delta x A A_S}{A} = n\Delta x A_S$ bzw. $\Delta N = -n\Delta x A_S N$, wie zu zeigen war.

2. Man erhält aus $f(x) = f(0)e^{Cx}$ sofort die Ableitung:
   $f'(x) = f(0)Ce^{Cx} = Cf(0)e^{Cx} = Cf(x)$.
   $f(x) = f(0)e^{Cx}$ ist also eine Lösung der DGL (4).
3. Mit $f(x) = N(x)$ und $C = -nA_S$ wird
   b) $N(x) = N_0 e^{-nA_S x}$, wenn wir $N_0 = N(0)$ verabreden.
4. Wir benötigen die Molekülzahldichte n und berechnen sie für das Volumen V_0, das die Stoffmenge 1 mol einnimmt. 1 mol enthält $N_A = 6{,}0221 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Dann gilt nach der allgemeinen Gasgleichung:

   c) $n = \frac{N_A}{V_0} = \frac{N_A p}{\nu RT}$ mit $\nu = 1$ mol.

   Numerische Berechnung:

   $N_A = 6{,}0221 \cdot 10^{23}$ Teilchen pro mol

   Druck: $p := 2 \cdot 10^{-3}$ Pa

   Temperatur des Gases: $T := 273$ K

   universelle Gaskonstante: $R := 8{,}3144 \frac{J}{K \cdot mol}$

   Stoffmenge: $\nu := 1{,}0$ mol $\quad n := \frac{N_A \cdot p}{\nu \cdot R \cdot T}$

   $n = 5{,}306 \cdot 10^{17}$ Teilchen pro m^3

   Für den Absorptionskoeffizienten α ergibt sich:

   Radius des Stickstoffmoleküls: $r_N := \frac{340}{2} \cdot 10^{-12}$ m

   Stoßquerschnitt: $A_S := \pi(2 \cdot r_N)^2 \quad A_S = 3{,}632 \cdot 10^{-19}\ m^2$

   Absorptionskoeffizient: $\alpha := n \cdot A_S \quad \alpha = 0{,}193 \frac{1}{m}$

   Nach Aufgabe 3 gilt: $N(x) = N_0 e^{-\alpha x}$.

   also $\frac{N(x_H)}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\alpha x_H}$ und damit $x_H = \frac{-\ln 0{,}5}{\alpha} = \frac{\ln 2}{\alpha} = \frac{\ln 2}{0{,}193} m = 3{,}59$ m.

   Die Halbwertslänge x_H des Gasvolumens beträgt also etwa 3,6 m.