Kompetenzbereich Modellieren – Die Entwicklung von Covid-19 aus mathematischer Sicht

Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Illustrationen von Udo Mühlenfeld

© Tang Ming Thung/DigitalVision/Getty Images Plus

Diese Unterrichtseinheit bietet anhand authentischer Kontexte die Möglichkeit, insbesondere die Kompetenzbereiche **Modellieren** und **Werkzeuge nutzen** zu stärken. Mathematik kann sich nur im Wechselspiel zwischen der Theorie und der Realität entwickeln, um so einen Beitrag zu leisten, die uns umgebende Welt zu verstehen und mitzugestalten. Die Materialien erlauben weitgehend eine selbstständige Erarbeitung der Sachzusammenhänge. Der GTR nimmt in diesem Beitrag einen breiten Raum ein, zum einen ist er ein wichtiges Hilfsmittel für die Berechnungen und grafischen Darstellungen im Zusammenhang mit Modellfunktionen, zum anderen bietet er Experimentiermöglichkeiten, um beispielsweise die e-Funktion als Lösung der Zerfallsgleichung durch Probieren zu finden.

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analysis Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © Tang Ming Thung/DigitalVision/Getty Images Plus
Lektorat: Christin Bossert, Rastatt, Mona Hitzenauer, Regensburg
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.

Kompetenzbereich Modellieren – Die Entwicklung von Covid-19 aus mathematischer Sicht

Oberstufe (Leistungskurs)

Udo Mühlenfeld, Hiddenhausen
Illustrationen von Udo Mühlenfeld

Methodisch-didaktische Hinweise	**1**
Theorie	**4**
M 1 Ein Datensatz – unterschiedliche Modellfunktionen	**5**
M 2 Modellfunktionen anwenden und validieren	**6**
M 3 Modellierung möglicher Szenarien	**8**
M 4 Die Basis e – die Euler'sche Zahl im Kontext	**10**
M 5 Werkzeuge nutzen – Tippkarten für TI-NSpire CX	**11**
Lösungen	**14**

Die Schüler lernen:

- Messwerte grafisch darzustellen,
- Modellfunktionen sicher anzuwenden,
- mit der Exponentialfunktion zu rechnen,
- den GTR souverän einzusetzen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Ein Datensatz – unterschiedliche Modellfunktionen	M 1	Ab
Modellfunktionen anwenden und validieren	M 2	Ab
Modellierung möglicher Szenarien	M 3	Ab
Die Basis e – die Euler'sche Zahl im Kontext	M 4	Ab
Werkzeuge nutzen – Tippkarten für TI-NSpire CX	M 5	Ab

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.	

Kompetenzprofil

Inhalt: Messwerte grafisch darstellen, Regression mit verschiedenen Funktionen, Modellfunktionen anwenden und validieren, Wachstumsmodelle vergleichen, Parameterkurven, Glockenkurve, Euler'sche Zahl, stetige Verzinsung, Wachstumsgleichung
Medien: GTR, Online-Recherche
Kompetenzen: mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)

Kompetenzbereich Modellieren – Die Entwicklung von Covid-19 aus mathematischer Sicht – Hinweise

Prof. Josef Leisen stellt in seinem Beitrag

„Kompetenzorientierung – Vom handelnden Umgang mit Wissen und Werten"

(Quelle: http://www.lehr-lern-modell.de/kompetenzorientierung, aufgerufen am 1.09.2020)

vier Kernaussagen zum kompetenzorientierten Unterricht auf:

- Kompetenz ist der handelnde Umgang mit Wissen und Werten.
- Kompetenzen werden an Inhalten im handelnden Umgang erworben.
- Kompetenzen werden erworben und nachgewiesen, wenn die Lerner authentische Anforderungssituationen bewältigen müssen.
- Die Kompetenzentwicklung ist nicht an Kontexte gebunden, diese begünstigen jedoch die Kompetenzentwicklung.

Authentische Anforderungssituationen, von denen Schülerinnen und Schüler[1] betroffen sind, finden sich in der Corona-Krise. Sie stellt zwar eine enorme Belastung für die Gesellschaft und die Gesundheit der Menschen in vielen Aspekten dar, bietet aber aus mathematischer Sichtweise umfangreiches Zahlenmaterial. Auf dieser Basis kann die Kernkompetenz des sinnstiftenden Modellierens gefördert werden. Der gewünschte handelnde Umgang mit Wissen und Werten erfordert an dieser Stelle den Einsatz des GTR, um das umfangreiche Datenmaterial zu präsentieren und zu verarbeiten.

In der Bevölkerung bestehen wenn überhaupt nur vage Vorstellungen über das Wachstum, in der Regel wird nur zwischen linearem Wachstum (die Werte steigen gleichmäßig an) und exponentiellem Wachstum (die Werte steigen schnell an) unterschieden, ohne dass eine klare mathematische Begriffsbildung existiert.

1 Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler" verwendet.

Auch Schüler sind häufig zufrieden, wenn sie zu vorhandenen Werten z. B. eine exponentielle Modellfunktion gefunden haben, sodass der Graph durch möglichst viele Messpunkte verläuft.
Hier muss die Transparenz geschaffen werden, die Sinnhaftigkeit der Modellierung herauszuarbeiten: welcher Nutzen ergibt sich aus der Kenntnis der Modellfunktion? Diese Punkte werden jetzt konkret an den einzelnen Blättern des Aufgabenmaterials verdeutlicht.

Im Material **M 1** visualisieren die Lernenden zunächst einmal authentische Daten, um die Entwicklung in den ersten drei Wochen der Pandemie in Deutschland zu beschreiben. Dann untersuchen sie, ob sie die subjektiv empfundene exponentielle Entwicklung auch durch andere Funktionen angemessen beschreiben können. Die Schüler müssen erkennen und verstehen, warum es nicht die eine richtige Lösung geben kann.
Methodisch bietet sich bei Teilaufgabe 3 eine arbeitsteilige Gruppenarbeit an, bei der im Anschluss die Ergebnisse präsentiert und im Plenum diskutiert werden. Die Schüler können ergänzend dazu Recherche-Aufgaben bearbeiten, etwa warum die Johns-Hopkins-Universität in den USA zu etwas anderen Zahlen kommt.

Im Material **M 2** rücken zwei Aspekte in den Vordergrund, die die Sinnhaftigkeit der Modellierung in den Vordergrund stellen: Die Schüler wenden eine Modellfunktion an, um Verdopplungszeiten zu bestimmen, die für die Einschätzung der weiteren Entwicklung und die Wirksamkeit eingeleiteter Maßnahmen eine hohe Aussagekraft besitzen. Zum anderen können sie beurteilen, ob die gewählte Modellfunktion über den Zeitraum hinaus geeignet ist, indem sie die Funktionswerte mit den real existierenden Messwerten vergleichen. Methodisch können auch hier die Gruppen alternativ mit ihren Ergebnissen von Blatt 1 weiterarbeiten.

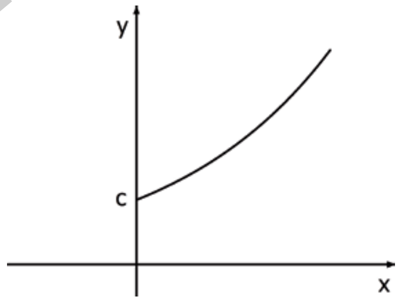
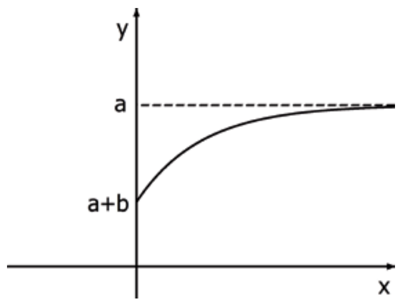
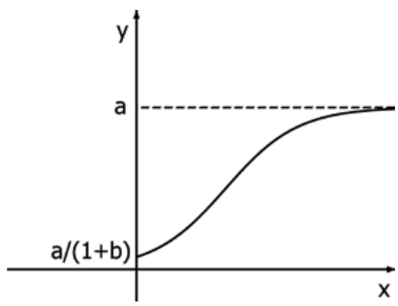
Im Material **M 3** wird der Ausblick in die Zukunft thematisiert. Inhaltlich werden verschiedene Wachstumsmodelle miteinander verglichen. Dies gelingt den Lernenden leichter – um noch einmal den Blick auf Leisens vierte Kernaussage zu lenken –, wenn sie die Modelle im Kontext der Corona-Krise diskutieren. Zugleich werden bei einer parameterabhängigen Kurvendiskussion die Bedeutung der Parameter und deren Veränderung in den Kontext eingebunden. Nehmen Sie sich an dieser Stelle die Zeit, um den vielfältigen Eindrücken und auch Ängsten der Schüler Raum zu geben. Vielleicht gibt es neben den vier angebotenen Szenarien für die fernere Entwicklung auch Abläufe, die aus Sicht der Schüler viel wahrscheinlicher sind.

Im Material **M 4** bauen die Schüler ein vertieftes Verständnis für die Euler'sche Zahl e als Basis einer Exponentialfunktion auf. Die e-Funktion verknüpfen sie inhaltlich meist nur mit der Vorstellung, eine Funktion zu haben, die mit ihrer Ableitungsfunktion identisch ist. Um Leisens zweiter Kernaussage gerecht zu werden, wird ein handelnder Umgang in neuen Kontexten thematisiert, in denen die Euler'sche Zahl beiläufig im Prozess als Ergebnis abfällt.

Das Material **M 5** stellt Tipps zur Verfügung, die in Form individueller Förderung genutzt werden können, um die Bedienkompetenz des GTR zu stärken. Dieses Material ist als Selbstlernmaterial konzipiert und kann den Schülern ganz oder in Teilen zur Verfügung gestellt werden. Denn der **Kompetenzbereich Modellieren** ist untrennbar mit dem **Kompetenzbereich Werkzeuge nutzen** verbunden. Dazu heißt es z. B. im Kernlehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen: Die digitalen Werkzeuge „erlauben es, größere Datenmengen zu verarbeiten, und erweitern die Möglichkeiten, komplexe Probleme numerisch, grafisch und algebraisch zu bearbeiten. Dadurch kann die Bearbeitung auf den eigentlichen mathematischen Kern konzentriert werden."

Theorie - tabellarische Übersicht

Die Darstellung der Theorie in einzelnen Abschnitten ermöglicht es Ihren Schülern, einzelne Aspekte der möglichen Wachstumsfunktionen zur Modellierung individuell zu vertiefen, zu wiederholen und an Beispielen zu sehen.

Art des Wachstums	**Mögliche Wachstumsfunktionen für $x \in ¡^+$**	
Unbegrenztes Wachstum	**Potenzfunktion:** $f(x) = a \cdot x^b;\quad a, b \in \mathbb{R}^+$	
	Polynomfunktion: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;\quad a_n,\ n \in \mathbb{N}$	
	Exponentialfunktion zur Basis a: $f(x) = c \cdot a^x;\quad c \in \mathbb{R}^+,\quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, genauer $a > 1$	
	Natürliche Exponentialfunktion: $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x};\quad k, c \in \mathbb{R}^+$ Mit $a = e^{\ln a};\quad a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x) = c \cdot a^x = c \cdot (e^{\ln a})^x = c \cdot e^{x \cdot \ln a}$ c: Anfangsbestand	
Begrenztes Wachstum	**Wachstumsfunktion:** $f(x) = a + b \cdot e^{-kx};\quad b \in \mathbb{R}^-,\ k \in \mathbb{R}^+$ a + b: Anfangszustand a: Grenzbestand, Sättigung	
Logistisches Wachstum	**Logistische Funktion:** $f(x) = \dfrac{a}{1 + b \cdot e^{-kx}};\quad k, a, b \in \mathbb{R}^+$ $\dfrac{a}{1+b}$: Anfangsbestand a: Grenzbestand, Sättigung	

M 1 Ein Datensatz – unterschiedliche Modellfunktionen

Die **kumulierten** Anzahlen der bestätigten SARS-CoV-2-Fälle in Deutschland wurden den täglichen Situationsberichten des Robert-Koch-Institutes in Berlin[2] entnommen:

Datum	**04.03.20**	**05.03.20**	**06.03.20**	**07.03.20**	**08.03.20**	**09.03.20**	**10.03.20**
Tag	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	262	400	639	795	902	1139	1296

Datum	**11.03.20**	**12.03.20**	**13.03.20**	**14.03.20**	**15.03.20**	**16.03.20**	**17.03.20**
Tag	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl	1567	2369	3062	3795	4838	6012	7156

Datum	**18.03.20**	**19.03.20**	**20.03.20**	**21.03.20**	**22.03.20**	**23.03.20**	**24.03.20**
Tag	15	16	17	18	19	20	21
Anzahl	8198	10 999	13 957	16 662	18 610	22 672	27 436

1. Stellen Sie die Daten mithilfe der Tabellenkalkulation des GTR grafisch dar.
2. Beschreiben Sie, wie sich die Anzahl der bestätigten Fälle in diesen drei Wochen entwickelt hat.
3. Um die Entwicklung der Anzahl der bestätigten Fälle in diesem Zeitraum mathematisch zu beschreiben, sind verschiedene Modellfunktionen denkbar. Ermitteln Sie mithilfe einer Regression jeweils eine mögliche Modellfunktion. Infrage kommen dabei
   a) eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$,
   b) eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$,
   c) eine Potenzfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^b$,
   d) eine Polynomfunktion f.
4. Bewerten Sie die Ergebnisse aus Teilaufgabe 3, inwieweit die Funktionen geeignet sind, die Situation vom 4. März bis 24. März sachangemessen zu beschreiben.

---

2 https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/2020-03-18-de.pdf?__blob=publicationFile, aufgerufen am 1.09.2020

M 2 Modellfunktionen anwenden und validieren

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Fragestellungen die Modellfunktion von **M 1**, die die Situation vom 4. März bis 24. März am besten beschreibt. Für eine erste Beurteilung der Entwicklung der Pandemie ist die Änderung der **Verdopplungszeit**, also der Zeit, in der sich die Anzahl der bestätigten Fälle bei etwa gleichem Testumfang verdoppelt, von Bedeutung.

Aufgaben

1. Ermitteln Sie für den in **M 1** untersuchten Zeitraum mithilfe der Modellfunktion jeweils die Verdopplungszeiten. Stellen Sie Ihre Entwicklung als Säulendiagramm dar.

2. Das umfangreiche Datenmaterial des Robert-Koch-Institutes in Berlin erlaubt es nun, die mithilfe der Modellfunktion getätigten Vorhersagen für die weitere Entwicklung mit den realen Daten zu vergleichen.

Datum	25.03.20	26.03.20	27.03.20	28.03.20	28.03.20	30.03.20	31.03.20
Tag	22	23	24	25	26	27	28
Anzahl	31 554	36 508	42 288	48 582	52 547	57 298	61 913

Datum	01.04.20	02.04.20	03.04.20	04.04.20	05.04.20	06.04.20	07.04.20
Tag	29	30	31	32	33	34	35
Anzahl	67 366	73 522	79 696	85 778	91 714	95 391	99 225

a) Berechnen Sie mithilfe der Modellfunktion die Anzahl der kumulierten, bestätigten Fälle am 31.03.20 und 07.04.2020 und vergleichen Sie die Werte mit den Angaben aus der Tabelle.

b) Vergleichen Sie die reale Entwicklung der kumulierten bestätigten Fälle mit den Werten, die sich aus der Modellfunktion ergeben, indem Sie für den Zeitraum vom 25. März bis 7. April beide grafisch darstellen.

3. Untersuchen Sie, inwieweit eine Anpassung der infrage kommenden Modellfunktionen mit Blick auf den gesamten Zeitraum vom 4. März bis zum 7. April erforderlich ist, indem Sie die gesamten Daten mithilfe der Tabellenkalkulation des GTR grafisch darstellen und mithilfe einer Regression mögliche Modellfunktionen ermitteln.

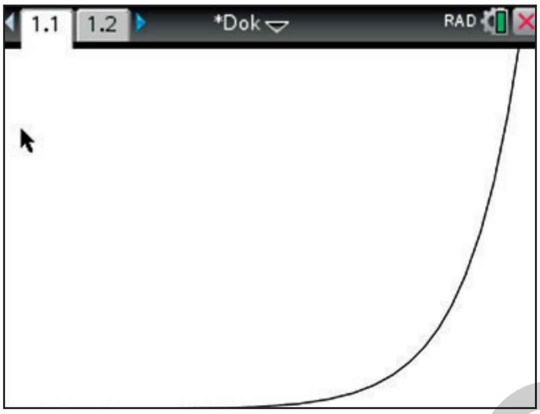
4. Nehmen Sie eine Neubewertung der Ergebnisse aus Teilaufgabe 3 von **M 1** vor, inwieweit die nun ermittelten Funktionen geeignet sind, die Situation vom 4. März bis 7. April sachangemessen zu beschreiben.

5. Ermitteln Sie für den gesamten Zeitraum mithilfe der nun optimalen Modellfunktion jeweils die Verdoppelungszeiten der bestätigten Fälle und stellen Sie ihre Entwicklung als Säulendiagramm dar. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe 1.

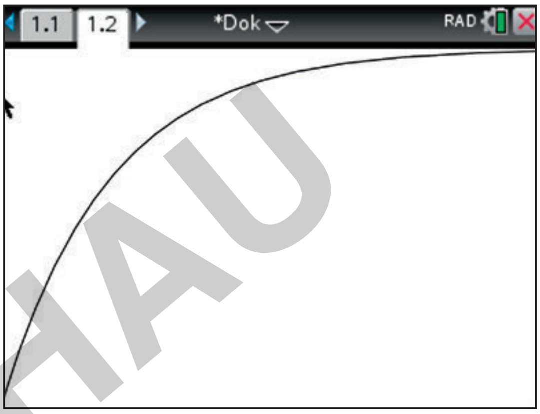
M 3 Modellierung möglicher Szenarien

Neben der mathematischen Strukturierung der Situation zu Beginn der Pandemie ist der Blick in die Zukunft genauso wichtig, um die Folgen der Erkrankungen und die Behandlungsmöglichkeiten realistisch einschätzen zu können.

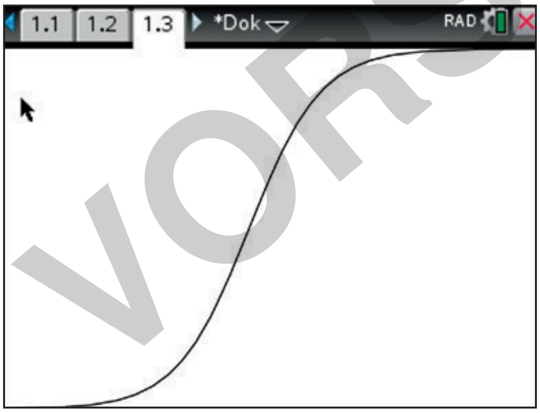
1. Die Mathematik zeigt mehrere Möglichkeiten auf, Wachstumsprozesse zu beschreiben:



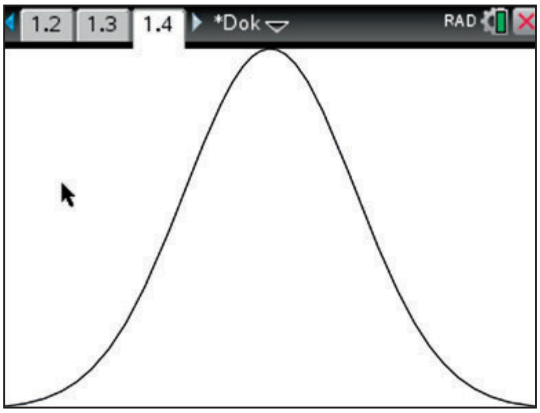
Unbegrenztes Wachstum



Begrenztes Wachstum



Logistisches Wachstum

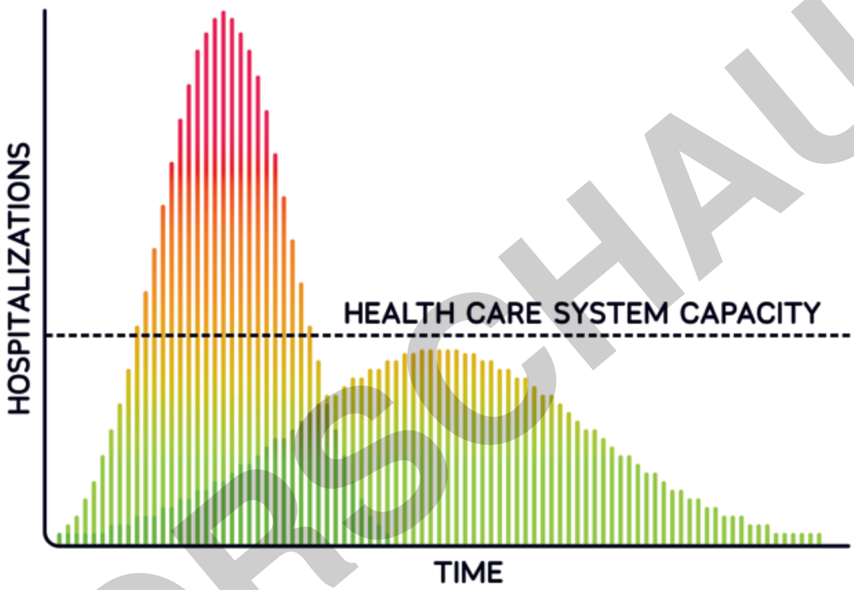


„Glockenkurve"

a) Welche Pandemieverläufe (Anzahl der aktiv Infizierten) sind denkbar? Recherchieren Sie dazu etwa im Internet und verschaffen Sie sich einen guten Überblick über das Geschehen.

b) Begründen Sie, warum es zu einem Verlauf wie in 1.4 kommen kann.

2. Mathematisch lässt sich die Glockenkurve durch eine Funktion f mit $f(x) = a + b \cdot e^{-c \cdot x^2}$ beschreiben, wobei dann der Zeitpunkt x = 0 willkürlich im Maximum der Funktion gewählt wird.
   a) Begründen Sie, dass es im Kontext Sinn macht, den Parameter a gleich null zu setzen.
   b) Ermitteln Sie rechnerisch den Hoch- und die Wendepunkte der Glockenkurve in Abhängigkeit von den Parametern b und c.
   c) Mit Blick auf die Leistungsfähigkeit des Gesundheitssystems werden in den Medien vieler betroffener Länder Grafiken der folgenden Art präsentiert:



© *filo/DigitalVisionVectors/Getty Images Plus*

   Beschreiben Sie die Grafik aus mathematischer Sicht wie auch im Sachzusammenhang.
   d) Erläutern Sie, welche Forderungen u. a. auch das Robert-Koch-Institut aus dieser Grafik ableitet und durch welche Maßnahmen diese Zielsetzungen möglicherweise erreicht werden können.
   e) Benennen Sie mögliche Nachteile, wenn der Hochpunkt noch tiefer unter der gestrichelten Linie liegt und der Graph dadurch noch flacher verläuft.
   f) Beleuchten Sie diese Forderungen aus mathematischer Sicht, indem Sie mithilfe von Teilaufgabe 2b) die Auswirkungen auf die Parameter b und c untersuchen und mit dem GTR veranschaulichen.

M 4 Die Basis e – die Euler'sche Zahl im Kontext

Aufgaben

1. Bei der Verzinsung eines Kapitals werden in der Regel die Zinsen nach einem Jahr berechnet und zum vorhandenen Kapital addiert, dieses erhöhte Kapital bildet dann die Grundlage für die Zinsberechnung im kommenden Jahr. Zunehmend ist es üblich, dass die Zinsberechnung bereits halb- oder auch vierteljährlich erfolgt.

   Hinweis: Bei folgenden Überlegungen legen wir ein Kapital von 1 € und einen jährlichen Zinssatz von 100 % zugrunde, um die Berechnungen zu vereinfachen und den Fokus auf die Veränderung zu richten.

   a) Stellen Sie jeweils einen Term für das Endkapital K nach einem Jahr auf, und zwar bei jährlicher, halbjährlicher, monatlicher und täglicher Verzinsung, und erläutern Sie diese.
   b) Berechnen Sie die jeweiligen Werte für das Endkapital und interpretieren Sie die Ergebnisse.
   c) Verkleinern Sie in Gedanken die Zinsintervalle bis hin zu einer sog. stetigen Verzinsung, bei der die Zinsen quasi sofort berechnet und im gleichen Moment dem Kapital zugeschlagen werden. Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. Beim radioaktiven Zerfall zerfallen anschaulich gesprochen im gleichen Zeitraum mehr Atomkerne, wenn die Anzahl der nicht zerfallenen Kerne größer ist. Exakt formuliert gilt: Die Zerfallsrate $\frac{dN}{dt}$ ist proportional zur Anzahl N der nicht zerfallenen Kerne.

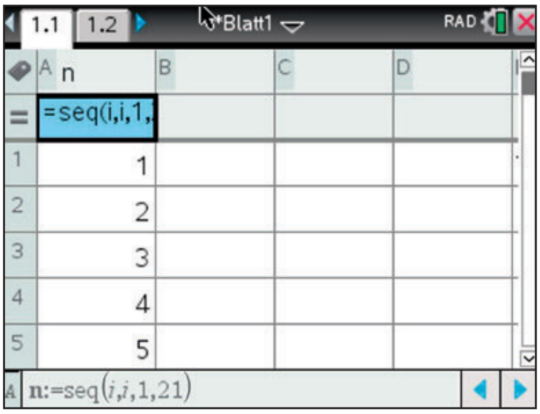
   a) Begründen Sie, dass es demnach eine Funktion geben muss, die an jeder Stelle mit ihrer Ableitung identisch ist.
   b) Argumentieren Sie anschaulich, dass es sich bei dieser Funktion um eine Exponentialfunktion handeln könnte.
   c) Ermitteln Sie die Basis dieser Exponentialfunktion f, indem Sie für verschiedene Basen a den Graphen von f mit $f(x) = a^x$ und der Ableitungsfunktion f' mit dem GTR in einem gemeinsamen Koordinatensystem grafisch darstellen.

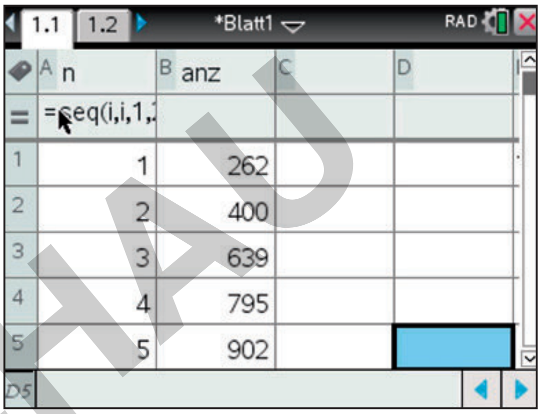
   Hinweis:
   Dazu muss der Term der Ableitungsfunktion nicht berechnet werden.

M 5 Werkzeuge nutzen – Tippkarten für TI-NSpire CX

Daten mit der Tabellenkalkulation grafisch darstellen

Öffnen Sie mit menu und 4 die Tabellenkalkulation. Geben Sie in den Feldern A und B die Namen für die Variablen mit n und anz ein. Geben Sie direkt unter dem Feld A den Befehl =seq(i,i,1,21) ein und schließen Sie mit enter ab. Dadurch wird die Zeitreihe automatisch ausgefüllt. Tragen Sie die Anzahlen aus der Tabelle in die Felder B1 bis B21 ein.





Öffnen Sie mit ctrl, doc und 5 das Statistikmenü. Klicken Sie auf den unteren Rand und wählen Sie als Variable n aus, klicken Sie auf den linken Rand und wählen Sie als Variable anz aus.