I.C.62

Algebra

Grundvorstellungen von linearen Funktionen

Carsten Trost, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

© Hydromet/iStock/Getty Images Plus

© RAABE 2020

VORSCHAU

Was kann man sich eigentlich unter einer „Funktion" vorstellen? Wo finde ich sie im Alltag? Und über welche Eigenschaften verfügen Funktionen?
Die Förderung vielfältiger und intuitiver Grundvorstellungen verhilft den Schülern zu einem tiefen Verständnis des (linearen) Funktionsbegriffs. Die Bearbeitung anschaulicher Aufgaben aus dem Alltag – z. B. das Schmelzen eines Schneemanns – lenkt ihre Aufmerksamkeit dabei jeweils auf eine andere Grundvorstellung. Dies ermöglicht einen verständnisorientieren Erwerb des Funktionsbegriffes und der dazugehörigen mathematischen Verfahrensweisen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8 (G8)
Dauer:	ca. 6 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), Mathematisch modellieren (K3), Mathematische Darstellungen verwenden (K4), Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Thematische Bereiche:	Lineare Funktionen (Zuordnungs-, Kovariations- und Objektaspekt)
Medien:	Texte, Schaubilder, Dynamische Geometriesoftware

netzwerk lernen
zur Vollversion

Didaktisch-methodische Hinweise

Die Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs

Eines der Hauptziele der Mathematikdidaktik ist die Ausbildung von Grundvorstellungen. Diese verleihen abstrakten Begriffen Anschaulichkeit, geben ihnen einen Sinn und einen Alltagsbezug. Wer sich unter dem Begriff „Funktion" etwas vorstellen, diesen Begriff vielleicht sogar mit Beispielen aus dem Alltag verbinden kann, der hat leichteren Zugang zu den formalen und rechnerischen Aspekten des Themas.

Man unterscheidet im Allgemeinen drei verschiedene Grundvorstellungen von Funktionen:

- **Der Zuordnungsaspekt:** Funktionen beschreiben Zusammenhänge zwischen Größen; einer Größe wird genau eine zweite zugeordnet. Hierauf wird in den Arbeitsblättern **M 1** und **M 2** eingegangen.
- **Der Kovariationsaspekt:** Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf eine von ihr abhängige Größe auswirkt. Hierauf wird in den Arbeitsblättern **M 3** und **M 4** eingegangen.
- **Der Objektaspekt:** Die Funktion wird als eigenständiges mathematisches Objekt betrachtet, das bestimmten Regeln gehorcht. Man betrachtet nicht mehr einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare. Hierauf wird im letzten Arbeitsblatt **M 5** eingegangen.

Mithilfe dieses Beitrags entwickeln Ihre Schüler eine anschauliche Vorstellung von einer Funktion (als Zuordnung, als Abbildung, als Wachstum bzw. Abnahme, als Veränderung und schließlich als mathematisches Objekt). Sie üben den Umgang mit grundlegenden Darstellungsformen für eine Funktion (Wertetabelle, Graph, Gleichung) und den Darstellungswechsel. Forschend-entdeckendes Arbeiten mit der Dynamischen Geometriesoftware *GeoGebra* rundet den Beitrag ab.

Benötigtes Vorwissen der Schüler

Die Schülerinnen und Schüler[1] sollten über Vorwissen zu (proportionalen) Zuordnungen verfügen. Sie sollten in diesem Zusammenhang bereits mit **Wertetabellen, Koordinatensystemen** und **Graphen** gearbeitet haben. Denn auf den Arbeitsblättern werden in der Regel folgende vier Darstellungsformen für Funktionen genutzt:

- Sprachlich: eine Beschreibung der Funktion
- Tabellarisch: die Wertetabelle
- Grafisch: der Funktionsgraph
- Symbolisch: die Funktionsgleichung

Selbstverständlich sollten sie ebenfalls die Begriffe *Variable*, *Term* und *Gleichung* kennen.

Die Arbeit mit den Arbeitsblättern

Lassen Sie Ihre Schüler die Arbeitsblätter in der entsprechenden Reihenfolge bearbeiten. Für die Arbeitsblätter **M 1–M 4** können Sie je eine Unterrichtsstunde veranschlagen, für **M 5** brauchen Sie zwei. Gehen Sie zu Beginn jeder Stunde mit der Klasse gemeinsam die *Einführung* des aktuellen Arbeitsblattes durch. Klären Sie dadurch entstandene Fragen, lassen Sie die Lernenden Beispiele zur *Einführung* aus dem Alltag sammeln und besprechen Sie die *Unterschiede* zu den vorangegangenen Grundvorstellungen. Die Schüler können dann einzeln (oder in Partnerarbeit) an den Aufgaben arbeiten. Sie brauchen zum Stundenende lediglich die Ergebnisse zu sichern und offene Fragen zu klären.

[1] Im weiteren Verlauf wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit nur noch „Schüler" verwendet.

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

Computer mit Dynamischer Geometriesoftware nötig

Für das Arbeitsblatt **M 5** wird eine dynamische Mathematiksoftware benötigt, um die Graphen der linearen Funktionen darzustellen, zu bewegen und zu untersuchen. Das Arbeitsblatt ist auf die Dynamische Geometriesoftware *GeoGebra* ausgelegt, aber auch jede andere geeignete Software ist möglich.

Mit diesem Arbeitsblatt sollen die Schüler selbstständig das Verhalten der Funktionen untersuchen. Ihre Beobachtungen sollen sie dabei in ganzen Sätzen notieren. Lassen Sie die Schüler hier möglichst selbstständig arbeiten und geben Sie nur minimale Hilfen. Fassen Sie dann am Ende die Beobachtungen der Schüler mit der ganzen Klasse zusammen und lassen Sie gemeinsam passende **Merksätze** für die beiden Parameter formulieren, z. B. „Der Parameter *b* verschiebt den Graphen entlang der y-Achse nach oben oder unten. Dabei ändert sich die Steigung des Graphen nicht. Gleichzeitig liegt der y-Achsenabschnitt immer bei *b*. Daher wird *b* auch oft *Anfangswert* oder *Startwert* genannt." Der zweite Merksatz könnte lauten: „Der Parameter *m* bestimmt, wie steil der Graph ansteigt oder abfällt. Dabei entspricht die Zahl *m* genau der Höhenänderung, wenn man um eine Einheit in Richtung der x-Achse nach rechts geht. Bei negativem *m* sinkt der Graph, und bei $m = 0$ verläuft der Graph genau waagerecht. Daher wird *m* auch die *Steigung des Graphen* genannt."

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler …	Anforderungsbereich
K2	L4	… finden Lösungswege für einfache, mathematische Aufgaben durch Analogiebetrachtungen.	I
K3	L4	… führen vorgegebene Situationen direkt in ein mathematisches Modell über, … interpretieren mathematische Ergebnisse hinsichtlich einfacher Sachkontexte.	I
K4	L4	… fertigen Standarddarstellungen von mathematischen Objekten und Situationen an und nutzen diese, … können gegebene Darstellungen interpretieren, … wechseln zwischen verschiedenen Darstellungen.	I-II
K5	L4	… nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Mathematikwerkzeuge direkt, … gehen mit mathematischen Objekten im Kontext um, … können eigenständig Zusammenhänge und Besonderheiten der mathematischen Objekte erkunden und reflektieren.	I-III

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

Auf einen Blick

Legende der Abkürzungen:
Ab = Arbeitsblatt; Wh = Wiederholungsblatt

1.–3. Stunde

Thema: **Erwerb von Grundvorstellungen zu linearen Funktionen**

M 1 (Wh) Funktionen als Zuordnung – frische dein Wissen auf!
M 2 (Ab) Funktionen als Abbildung
M 3 (Ab) Funktionen als Wachstum bzw. Abnahme

Benötigt: ☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard

4.–6. Stunde

Thema: **Erwerb von weiteren Grundvorstellungen zu linearen Funktionen**

M 4 (Ab) Funktionen als Veränderung
M 5 (Ab) Funktionen als mathematisches Objekt

Benötigt:
☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard
☐ 1 PC mit Dynamischer Geometriesoftware pro Schüler(-gruppe)

Minimalplan
Die Arbeitsblätter sind jeweils einzeln einsetzbar, wenn nur ein bestimmter Aspekt des Funktionsbegriffs herausgearbeitet oder wiederholt werden soll.

Erklärung des verwendeten Symbols

	Dieses Symbol steht für Zusatzaufgaben für schnelle Schüler.

Mediathek

- https://www.schulentwicklung.nrw.de/sinus/front_content.php?idart=3195
  SINUS ist ein Projekt zur Steigerung der Effizienz des Unterrichts der MINT-Fächer (Mathematik, Biologie, Chemie, Physik, Informatik, Technik). Auf der angegebenen Seite wird der Kovariationsaspekt von Funktionen erklärt. (Link zuletzt aufgerufen am 1.04.2020)

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen
zur Vollversion

Funktionen als Zuordnung – frische dein Wissen auf! M 1

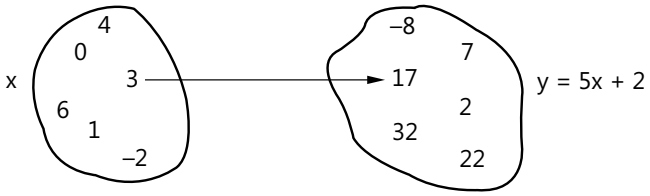
Einführung

Zuordnungen kennst du schon. Weil Funktionen, insbesondere lineare Funktionen, um die es hier geht, ein Spezialfall der Zuordnungen sind, nämlich eindeutige Zuordnungen, wiederholst du zunächst den Zuordnungsbegriff.

Wir ordnen immer einer Zahl x (x nennt man eine *Variable*, da x für verschiedene Zahlenwerte stehen kann) eine andere Zahl y zu. Dabei können x und y ganz unterschiedliche Bedeutungen haben.

Aufgaben

1. Ordne jeder Zahl x aus der linken Menge die passende Zahl y aus der rechten Menge zu, und zwar soll jeder Zahl aus der linken Menge ihr „5-Faches erhöht um 2" zugeordnet werden.



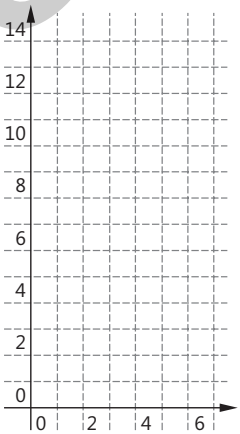
Grafik: Dr. W. Zettlmeier

2. Martin kauft x Kisten Mineralwasser für je 4,50 €. Er bezahlt y €.
   a) Schreibe auf: Welche Größe wird hier welcher zugeordnet?
   b) Stelle die beschriebene proportionale Zuordnung als Wertetabelle/Graph/Gleichung dar.

Wertetabelle:

x	0	1					
y		4,5 €					

Graph:



Gleichung: y =

Grafik: Dr. W. Zettlmeier

3. In einer Badewanne sind 20 Liter Wasser. Der Stöpsel wird gezogen und jede Minute laufen 2 Liter Wasser ab. Die vergangenen Minuten ab diesem Zeitpunkt (t = 0) werden mit x bezeichnet. Die noch in der Badewanne vorhandene Wassermenge bezeichnen wir mit y.
   a) Schreibe auf: Welche Größe wird hier welcher zugeordnet?
   b) Stelle die beschriebene Zuordnung als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar.
4. Denke dir weitere Beispiele für Zuordnungen aus deinem Alltag aus.

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen
zur Vollversion

M 2 Funktionen als Abbildung

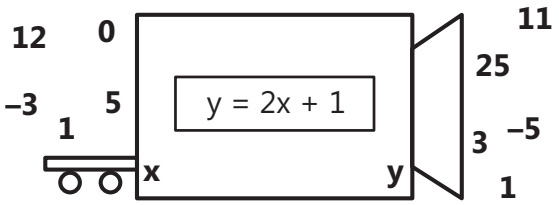
Einführung

Bei Funktionen wird jeder Zahl x der Definitionsmenge eindeutig eine Zahl y der Zielmenge zugeordnet. Man kann sich das auch so vorstellen, dass die Funktion jede Zahl x auf eine Zahl y abbildet. Dabei gibt die Funktionsvorschrift an, wie genau der Abbildungsprozess geschieht.

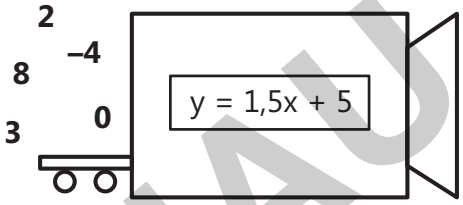
Aufgabe 1

Diese „Funktionsmaschine" verwandelt Zahlen. Auf der linken Seite kommen die x-Zahlen in die Maschinen, auf der rechten Seite kommen dann die verwandelten y-Zahlen wieder heraus.

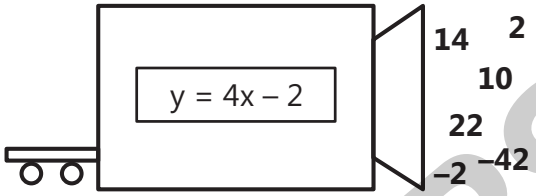
a) Ordne der jeweiligen Zahl x die richtige Zahl y zu.
Beispiel: 5 → 11



b) Bilde alle Zahlen x der Definitionsmenge auf die Zielmenge ab – entsprechend der Vorschrift.

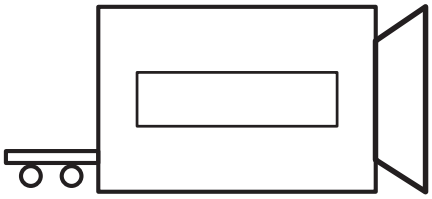


c) Welche Ausgangszahlen hat die Maschine verarbeitet?



d) Finde das Abbildungsgesetz.

1 → 7
3 → 11
10 → 25
6 → 17
–1 → 3



Grafiken: Dr. W. Zettlmeier

Aufgabe 2

Stelle die folgenden Funktionsmaschinen jeweils als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar. Du sollst nur die x-Zahlen im Intervall von 0 bis 6 benutzen.

a) Eine Funktionsmaschine verfünffacht alle Zahlen der Definitionsmenge und zieht dann jeweils 4 davon ab.

b) Eine Funktionsmaschine halbiert alle Zahlen der Definitionsmenge und addiert dann jeweils 4.

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen
zur Vollversion

Funktionen als Wachstum bzw. Abnahme

M 3

Einführung

Je nachdem, ob die Steigung einer Funktion positiv oder negativ ist, werden die Funktionswerte mit zunehmendem x entweder immer größer oder immer kleiner – den Fall, dass der Funktionswert konstant ist, wollen wir hier ausklammern.

Du kannst dir eine Funktion also als „Wachstum" bzw. „Abnahme" vorstellen.

- Die Werte x stehen häufig für Zeitpunkte, also 1 Minute, 2 Minuten, 3 Minuten usw.
- Die „Bilder" y nehmen dann mit der Zeit zu (bei positiver Steigung) bzw. ab (bei negativer Steigung).

Aufgabe 1

Ein kleiner Baum wird eingepflanzt, als er 60 cm hoch ist. Jedes Jahr wächst er um 20 cm. Wir bezeichnen die Größe des Baumes mit y. x steht für die Zeit, seit er eingepflanzt wurde (in Jahren).

Stelle den beschriebenen Wachstumsvorgang als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar.

© ArtMarie/E+/Getty Images Plus, Mit Model Release

Aufgabe 2

Ein Schneemann ist 1,6 m hoch. Der Frühling setzt ein, und er beginnt zu schmelzen. Jeden Tag verliert er 0,1 m an Höhe.

a) Schreibe auf: Welche Größe wird hier welcher zugeordnet?

b) Stelle die beschriebene Abnahme als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar.

Aufgabe 3

Maria ist zu Beginn der 7. Klasse 145 cm groß. Sie misst sich regelmäßig ganz genau und stellt fest, dass sie pro Monat um 0,4 cm wächst.

a) Schreibe auf: Welche Größe wird hier welcher zugeordnet?

b) Stelle das beschriebene Wachstum als Wertetabelle und Funktionsgleichung dar.

c) Wird Maria immer so weiterwachsen? Was bedeutet das für die Werte der Funktion?

Aufgabe 4

Schreibe auf: Worin unterscheiden sich Wachstums- und Abnahmevorgänge jeweils bei …

- … der Wertetabelle?
- … dem Graphen?
- … der Funktionsgleichung?

Aufgabe 5

Finde für Wachstum und Abnahme weitere Beispiele aus deinem Alltag.

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion

M 4 Funktionen als Veränderung

Einführung

Wenn sich bei einer Funktion die x-Werte ändern, dann ändern sich meistens auch die y-Werte. Also kann man eine Funktion auch dadurch beschreiben, wie sich die y-Werte ändern, wenn sich der x-Wert um 1 erhöht.

Aufgabe 1

Schreibe zu jeder der folgenden Wertetabellen, Graphen und Funktionsgleichungen einen Satz auf, der die Änderung der y-Werte allgemein beschreibt.

Beispiel: Wenn x um 1 größer wird, dann wird y um 2 größer.

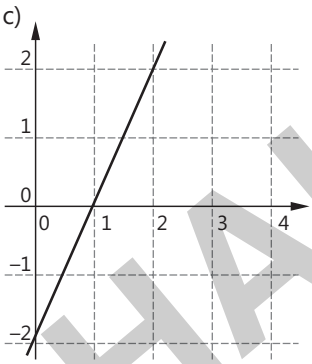
a)

x	1	2	3	4
y	10	20	30	40

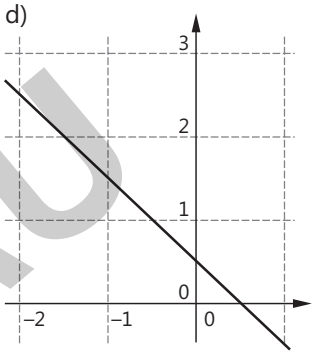
b)

x	0	1	2	3
y	1	4	7	10

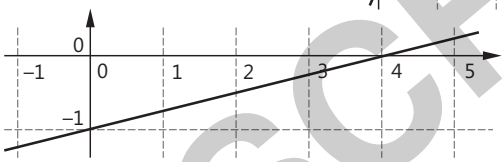
c)



d)



e)



f) $y = -2x$ g) $y = 0{,}5x + 4$ h) $y = x - 1$

Grafiken: Dr. W. Zettlmeier

Aufgabe 2

Du kaufst beim Bäcker Brötchen. Für jedes Brötchen musst du 0,80 € zahlen.

a) Schreibe auf: Welche Größe ist hier x und welche y?

b) Stelle die beschriebene Veränderung als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar.

Aufgabe 3

Ein Papierflieger wird aus einem 35 m hohen Fenster geworfen. Er verliert jede Sekunde 5 m Höhe.

a) Schreibe auf: Welche Größe ist hier x und welche y?

b) Stelle die beschriebene Veränderung als Wertetabelle, Graph und Gleichung dar.

Aufgabe 4

Bei der Veränderung beobachtet man nur einen bestimmten Teil der Funktionsgleichung, während man einen anderen Teil nicht beachtet. Welche Teile sind das? Ist das ein Vor- oder Nachteil?

VORSCHAU

© RAABE 2020

netzwerk lernen
zur Vollversion

Funktionen als mathematisches Objekt

M 5

Einführung

Hier siehst du einige Beispiele für Funktionsgleichungen:

$y = 3x + 5$, $y = -2x + 2$, $y = 8x - 4$, $y = \mathbf{m}x + \mathbf{b}$

Wie du siehst, kann sowohl die Zahl vor dem x als auch die Zahl ohne x verschiedene Werte annehmen. Jetzt sollst du an einem Computer untersuchen, welche Bedeutungen diese beiden Zahlen haben. Dazu kannst du beobachten, wie sich der Graph deiner Funktion bei unterschiedlichen Werten für **m** und **b** verändert. Schreibe deine Beobachtungen möglichst detailliert auf.

Aufgabe 1

a) Öffne *GeoGebra* und erstelle zwei Schieberegler mit den Bezeichnungen **m** und **b**.
b) Stelle **m** auf 0,5 und **b** auf 0 ein.
c) Gib in die Eingabezeile folgenden Ausdruck ein und bestätige mit Enter: f(x)=a*x+b

Aufgabe 2

Zuerst geht es nur um die Zahl ohne x. Wir bezeichnen sie mit der Variable **b**. Verändere den Schieberegler und beobachte die Auswirkungen auf den Funktionsgraphen.

a) Wie verändert sich der Graph, wenn du **b** veränderst?
b) Betrachte die Stelle, an welcher der Graph die y-Achse schneidet. Vergleiche diese Stelle mit deinem Wert für **b**. Was fällt dir auf?
c) Was passiert, wenn **b** = 0 ist?
d) Was hat der Wert von **b** mit der Vorstellung „Funktion als Wachstum bzw. Abnahme“ zu tun?
e) Was hat der Wert von **b** mit der Vorstellung „Funktion als Veränderung“ zu tun?

Aufgabe 3

Stelle den Wert **b** auf 4 ein und verändere ihn in dieser Aufgabe nicht. Jetzt geht es nur um die Zahl vor dem x. Wir bezeichnen sie mit der Variable **m**. Verändere den Schieberegler und beobachte die Auswirkungen auf den Funktionsgraphen.

a) Wie verändert sich der Graph, wenn du **m** veränderst?
b) Was hat der Wert von **m** mit der Vorstellung „Funktion als Wachstum bzw. Abnahme“ zu tun?
c) Was hat der Wert von **m** mit der Vorstellung „Funktion als Veränderung“ zu tun?
d) Wie unterscheidet sich der Graph bei positivem und negativem Wert für **m**?
e) Was passiert, wenn **m** = 0 ist?

Aufgabe 4

Jetzt sollst du zwei verschiedene Funktionen miteinander vergleichen. Erstelle dazu zunächst eine zweite Funktion mit eigenen Schiebereglern. Untersuche dann die folgenden Fragen:

a) Wann schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen nicht, sondern verlaufen parallel?
b) Wann liegen die Graphen der beiden Funktionen genau aufeinander?
c) Wann schneiden sich die Graphen der beiden Funktionen in einem Punkt?
d) Findest du jeweils verschiedene Möglichkeiten für **m** und **b**?

© RAABE 2020

VORSCHAU

netzwerk lernen

zur Vollversion