Anwendung der Vektorrechnung bei elementargeometrischen Aussagen – Teil 2

von Dr. Jürgen Leitz

Die Schüler werden mit einer sauberen Beweisführung (Skizze, Voraussetzungen, Behauptung und Beweisschritten) vertraut gemacht. Sie beweisen dadurch elementargeometrische Eigenschaften von verschiedenen Vierecken mithilfe von einfacher Vektorrechnung. Der Beitrag beinhaltet zudem eine kleine, auf den Beitrag abgestimmte Formelsammlung.

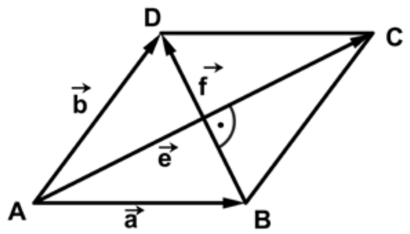
Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Irene Dick
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: Jekaterina Nikitina/DigitalVision/Getty Images
Illustrationen: Oliver Wetterauer
Korrektorat: Mona Hitzenauer

Beweisbeispiel:

<table>
<tr><td colspan="2">Beweise mithilfe von Vektoren und Skalarprodukt
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann ist das Viereck eine Raute (ein Rhombus).</td></tr>
<tr><td>Skizze:</td><td>
Abb. 2</td></tr>
<tr><td>Voraussetzungen:</td><td>$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0 \; \left(\text{weil } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}\right)$</td></tr>
<tr><td>Behauptung:</td><td>Das Viereck ABCD ist eine Raute, d. h. alle Seiten sind gleich lang
$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$</td></tr>
<tr><td>Beweis:</td><td>Für die Diagonalen gilt:
$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \circ \left(\vec{b} - \vec{a}\right) = 0$
$\Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} - \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
$\Leftrightarrow \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}\right|^2 = 0 \quad \left| + \left|\vec{a}\right|^2\right.$
$\Leftrightarrow \left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \quad \left| \sqrt{}\right.$
$\Leftrightarrow \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \quad \left(\text{weil } \left|\vec{b}\right|, \left|\vec{a}\right| > 0\right)$
Da $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ist, folgt daraus die Behauptung. Also sind alle vier Seiten gleich lang und das Parallelogramm ist eine Raute (ein Rhombus).
Was zu beweisen war (w. z. b. w.).</td></tr>
</table>

Kleine Formelsammlung

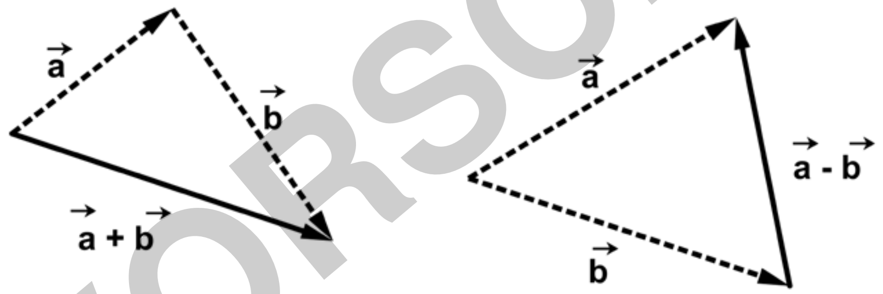
Ausgewählte wichtige Grundlagen der Vektorrechnung
Nachfolgend sind einige wichtige Grundlagen der Vektorrechnung aufgeführt, mit deren Hilfe das Lösen von geometrischen Aufgaben erleichtert wird.

1. Ein **Vektor** ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt:
   $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
   ($\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ sind Ortsvektoren, die im Koordinatenursprung O beginnen.)

2. Ein **Gegenvektor** hat die entgegengesetzte Richtung:
   $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ bzw. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

3. **Nullvektor**
   Ein Vektor $\vec{0}$, für den $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ gilt, heißt Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Es ist $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

4. **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren:



   Numerisch werden die einzelnen Komponenten der Vektoren addiert bzw. subtrahiert.

5. **Betrag** eines Vektors:

   Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

   (gilt auch für Vektoren in der Ebene, dann ist $a_3 = 0$)

Aufgaben

Einstiegsaufgaben zum Beweisen elementargeometrischer Aussagen bei Vierecken mithilfe von Vektoren (Wiederholung und Festigung)

Beweisen Sie vektoriell jeweils folgende Aussagen:

1. Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann sind die Diagonalen zueinander senkrecht (orthogonal).
2. Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, dann ist das Viereck ein Rechteck.
3. Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann sind die Diagonalen gleich lang.
4. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonallängen gleich der Summe der Quadrate der vier Seitenlängen.

Hinweis: Orientieren Sie sich dazu am Beweisbeispiel Abb. 2.

Weiterführende Komplexaufgaben zu elementargeometrischen Aussagen bei Vierecken

Hinweis: Berechnungen und Beweise sind vektoriell durchzuführen. Orientieren Sie sich am Beweisbeispiel.

1. Die Punkte $A(-4|-4)$, $B(7|-3)$, $C(8|8)$ und $D(-3|7)$ bestimmen ein Viereck.
   a) Zeichnen Sie die Punkte in das beigefügte Koordinatensystem (Abb. 3) ein und verbinden Sie diese zum Viereck ABCD. Wie nennt man dieses Viereck?
   b) Zeichnen Sie die Diagonalen mit ihrem Schnittpunkt E ein und lesen Sie die Koordinaten von Punkt E ab.
   c) Berechnen Sie die Koordinaten von E und vergleichen Sie diese mit den unter Teilaufgabe b) abgelesenen Werten.
   d) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen sowie die Teilstrecken, die durch den Schnittpunkt E entstehen, und vergleichen Sie die Längen der Diagonalen und der Teilstrecken. Zu welcher Erkenntnis kommen Sie?
   e) Gibt es weitere Eigenschaften der Diagonalen? Wenn ja, welche? Weisen Sie diese Eigenschaft ggf. rechnerisch nach.