

# Anwendung der Vektorrechnung bei elementargeometrischen Aussagen – Teil 2

von Dr. Jürgen Leitz



© Jekaterina Nikitina/DigitalVision/Getty Images

Die Schüler werden mit einer sauberen Beweisführung (Skizze, Voraussetzungen, Behauptung und Beweisschritten) vertraut gemacht. Sie beweisen dadurch elementargeometrische Eigenschaften von verschiedenen Vierecken mithilfe von einfacher Vektorrechnung. Der Beitrag beinhaltet zudem eine kleine, auf den Beitrag abgestimmte Formelsammlung.

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Analytische Geometrie Sek. II

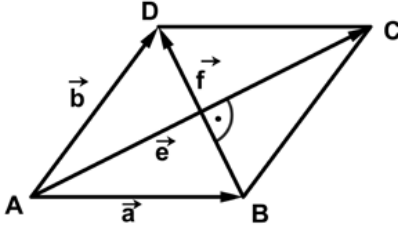
Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder in ein Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. GEMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden Fremdrechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Klett Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 62900-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Irene Dick  
Satz: Röser MEDIA GmbH & Co. KG, Karlsruhe  
Bildnachweis Titel: Jekaterina Nikitina/DigitalVision/Getty Images  
Illustrationen: Oliver Wetterauer  
Korrektorat: Mona Hitzenauer

Beweisbeispiel:

<b>Beweise mithilfe von Vektoren und Skalarprodukt</b>	
Beweisen Sie folgende Aussage: Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann ist das Viereck eine Raute (ein Rhombus).	
Skizze:	 <p>Abb. 2</p>
Voraussetzungen:	$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ (weil $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ )
Behauptung:	Das Viereck ABCD ist eine Raute, d. h. alle Seiten sind gleich lang $ \overrightarrow{AB}  =  \overrightarrow{BC}  =  \overrightarrow{CD}  =  \overrightarrow{DA} $
Beweis:	<p>Für die Diagonalen gilt:</p> $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ $\Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} -  \vec{a} ^2 +  \vec{b} ^2 - \vec{a} \circ \vec{b} = 0$ $\Leftrightarrow  \vec{b} ^2 -  \vec{a} ^2 = 0 \quad   +  \vec{a} ^2$ $\Leftrightarrow  \vec{b} ^2 =  \vec{a} ^2 \quad   \sqrt{\phantom{x}}$ $\Leftrightarrow  \vec{b}  =  \vec{a}  \quad (\text{weil }  \vec{b} ,  \vec{a}  > 0)$ <p>Da <math>\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}</math> und <math>\vec{b} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}</math> ist, folgt daraus die Behauptung. Also sind alle vier Seiten gleich lang und das Parallelogramm ist eine Raute (ein Rhombus).</p> <p>Was zu beweisen war (w. z. b. w.).</p>

## Kleine Formelsammlung

### Ausgewählte wichtige Grundlagen der Vektorrechnung

Nachfolgend sind einige wichtige Grundlagen der Vektorrechnung aufgeführt, mit deren Hilfe das Lösen von geometrischen Aufgaben erleichtert wird.

1. Ein **Vektor** ist eindeutig durch zwei Punkte bestimmt:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

( $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OA}$  sind Ortsvektoren, die im Koordinatenursprung  $O$  beginnen.)

2. Ein **Gegenvektor** hat die entgegengesetzte Richtung:

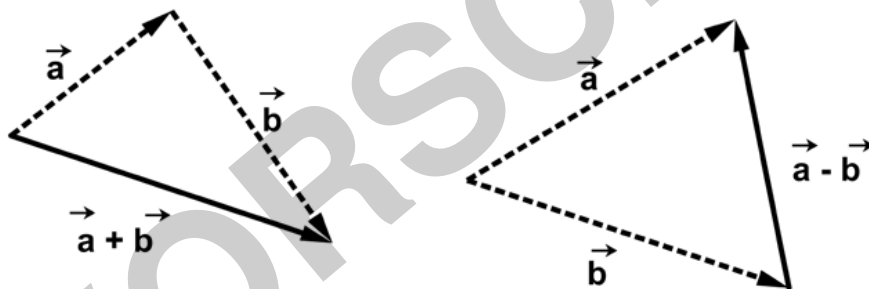
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

3. **Nullvektor**

Ein Vektor  $\vec{0}$ , für den  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$  gilt, heißt Nullvektor:  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es ist  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

4. **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren:



Numerisch werden die einzelnen Komponenten der Vektoren addiert bzw. subtrahiert.

5. **Betrag** eines Vektors:

$$\text{Mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ ist } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

(gilt auch für Vektoren in der Ebene, dann ist  $a_3 = 0$ )

## Aufgaben

### Einstiegsaufgaben zum Beweisen elementargeometrischer Aussagen bei Vierecken mithilfe von Vektoren (Wiederholung und Festigung)

**Beweisen** Sie vektoriell jeweils folgende Aussagen:

1. Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann sind die Diagonalen zueinander senkrecht (orthogonal).
2. Wenn in einem Parallelogramm die Diagonalen gleich lang sind, dann ist das Viereck ein Rechteck.
3. Wenn ein Viereck ein Rechteck ist, dann sind die Diagonalen gleich lang.
4. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonallängen gleich der Summe der Quadrate der vier Seitenlängen.



**Hinweis:** Orientieren Sie sich dazu am Beweisbeispiel Abb. 2.

### Weiterführende Komplexaufgaben zu elementargeometrischen Aussagen bei Vierecken



**Hinweis:** Berechnungen und Beweise sind vektoriell durchzuführen. Orientieren Sie sich am Beweisbeispiel.

1. Die Punkte  $A(-4|-4)$ ,  $B(7|-3)$ ,  $C(8|8)$  und  $D(-3|7)$  bestimmen ein Viereck.
  - a) Zeichnen Sie die Punkte in das beigefügte Koordinatensystem (Abb. 3) ein und verbinden Sie diese zum Viereck ABCD. Wie nennt man dieses Viereck?
  - b) Zeichnen Sie die Diagonalen mit ihrem Schnittpunkt E ein und lesen Sie die Koordinaten von Punkt E ab.
  - c) Berechnen Sie die Koordinaten von E und vergleichen Sie diese mit den unter Teilaufgabe b) abgelesenen Werten.
  - d) Berechnen Sie die Längen der Diagonalen sowie die Teilstrecken, die durch den Schnittpunkt E entstehen, und vergleichen Sie die Längen der Diagonalen und der Teilstrecken. Zu welcher Erkenntnis kommen Sie?
  - e) Gibt es weitere Eigenschaften der Diagonalen? Wenn ja, welche? Weisen Sie diese Eigenschaft ggf. rechnerisch nach.