Inhalt

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Vorwort

Obwohl im Zeitalter der Digitalisierung der frühzeitige Gebrauch des elektronischen Taschenrechners und der Einsatz des Computers im Mathematikunterricht den Erfordernissen unserer Zeit entsprechen, sollten die altbewährten Textaufgaben, wie man sie in alten Schulbüchern findet, nicht gänzlich in den Papierkorb wandern.

Die Aufgaben im vorliegenden Heft sind insbesondere für die „Hosentasche des Lehrers" als Material zur „ersten Hilfe" bei akut angeordneten Vertretungsstunden – auch für fachfremd unterrichtende Kollegen – bzw. zur Stundenergänzung im Mathematikunterricht, wenn das planmäßige Pensum erfüllt ist und noch Zeit bis zum Pausenklingeln bleibt, geeignet.

Der Inhalt berührt verschiedene Themen der Mathematik, insbesondere auch Fragestellungen, welche in der Geschichte der Mathematik für die Entwicklung dieser Wissenschaft eine bedeutsame Rolle gespielt haben. So werden unter anderem historische Fragestellungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt, wie beispielsweise der Briefwechsel zwischen Chevalier de Méré und Blaise Pascal betreffs der Chancen beim Würfelspiel, die Gaußsche Summenformel und die Legende von der Erfindung des Schachspiels, wobei der Lohn für den Erfinder ein beeindruckendes anschauliches Beispiel für exponentielles Wachstum darstellt.

Die Kopiervorlagen enthalten einfache bis anspruchsvolle Aufgaben, welche in Märchen, Geschichten oder wahren Begebenheiten leicht und unterhaltsam verpackt sind. Damit sollen neben der Rationalität auch – und das vermag kein Taschenrechner zu leisten – Phantasie und ästhetisches Empfinden der Schüler angesprochen werden, um sie noch ansprechender zu motivieren, selbständig Lösungsansätze zu suchen und die Aufgaben zielstrebig zu lösen.

Einige Aufgaben fordern von den Schülern, Bilder zu vorgegebenen Geschichten zu malen oder Geschichten zu mathematischen Sachverhalten zu schreiben.

Da die Aufgaben in Texte eingekleidet sind, kommt dem inhaltlichen Lesen große Bedeutung zu. Die Schüler sind somit angehalten, die zum Lösen der Aufgaben notwendigen Angaben aus nebensächlichen Informationen heraus zu filtern.

Obwohl die Aufgaben vorwiegend in einer „Leichtverpackung" – insbesondere für die jüngeren Schüler – angeboten werden, beinhalten sie Kernprobleme der Mathematik. Somit trägt der Einsatz dieses Materials in Vertretungsstunden und anderen unvorhergesehenen Situationen des Schulalltags zur Erfüllung des Bildungsauftrages im Fach Mathematik bei und kann den Lehrer gleichzeitig bei der Bewältigung oben genannter Situationen im Schulalltag entlasten.

Neben dem Einsatz im Unterricht sind die Arbeitsblätter auch für die selbständige Arbeit zu Hause geeignet, um auch bei Schülern, die zu dem Unterrichtsfach Mathematik ein kritisches und distanziertes Verhältnis aufgebaut haben, Interesse und Spaß bei der Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen.

Viel Erfolg beim Einsatz der Arbeitsmaterialien wünschen das Kohl Verlags-Team und

Barbara Theuer

1 Der mathematische Zauberer

Ein Zauberer sagte in einer Show zu einem Jungen, den er aus dem Publikum beliebig ausgewählt hatte: „Denke Dir eine gerade Zahl zwischen 1 und 20 und schreibe sie geheim auf einen Zettel. Nachdem du einige magische Operationen mit dieser Zahl ausgeführt hast, werde ich diese Zahl nennen – denn ich bin ein Zauberer."

Der Schüler schaute den Zauberer ehrfürchtig an und notierte eine Zahl, die außer ihm keiner kannte. Den Zettel versteckte er in seiner Hosentasche. Der Zauberer diktierte nun: ***„Addiere zum Doppelten der nur dir bekannten Zahl 12 und teile die erhaltene Summe durch 4. Subtrahiere nun 2*** und sage mir das Ergebnis."

Der Junge führte die „magischen" Operationen aus und nannte dem Zauberer das Ergebnis, nämlich „9". Der Zauberer runzelte die Stirn und schwenkte dann seinen Zauberstab mit Bewegungen, die ein X zu beschreiben schienen. „Auf deinem Zettel steht die Zahl 16." Der Junge grub nun den Zettel aus seiner Hosentasche und zeigte den erstaunten Zuschauern die Zahl 16.

Aufgabe 1: *Handelt es sich hier um „magische" Operationen? Ändere den Begriff:*

______________________ *Operationen*

Aufgabe 2: *Zeige, dass der Zauberer ohne Zauberei die Zahl berechnen kann. Tipp: Nenne die Zahl, welche Du dir gedacht hast, zunächst x und bilde entsprechend den „magischen" Operationen des Zauberers einen mathematischen Term. Beachte, dass man gerade Zahlen in der Form 2 · n (n natürlich) darstellen kann. Wenn du den Term soweit wie möglich vereinfachst, kannst du die Strategie des Zauberers erkennen. Prüfe das Verfahren auch für eine andere gedachte gerade Zahl nach. Klappt die Strategie auch für eine ungerade natürliche Zahl?*

____

____

____

Ein fauler Zauber oder Mathemat(r)i(c)k

Wähle eine beliebige natürliche Zahl. Multipliziere die um 3 vermehrte Zahl mit der um drei verminderten Zahl. Addiere 10. Subtrahiere von dem Ergebnis das Quadrat der ursprünglichen natürlichen Zahl. Welche Zahl erhältst du?

Wähle nun eine andere natürliche Zahl und wiederhole die Rechnung.

Der faule Zauberer nennt ohne zu rechnen das gleiche Ergebnis wie oben.

Aufgabe 3: *Notiere einen entsprechenden Term und zeige mittels Termumformung, dass – unabhängig von der gewählten Zahl – der Term stets den gleichen Wert annimmt.*

____

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

2 Der neue Schatzmeister (Blatt 1)

Nachdem der König eines einst reichen Landes erkennen musste, dass sein Schatzmeister das Land durch falsche Rechnungen in Not gebracht und außerdem auch noch betrogen hatte, beschloss der König, den unfähigen und unehrlichen Schatzmeister des Hofes zu verweisen. Er ließ im ganzen Land ausrufen, dass er einen neuen Schatzmeister suche, worauf sich viele Bewerber meldeten.

Um zu prüfen, wer am besten für die Verwaltung seiner Schätze geeignet sei, stellte der König den Bewerbern eine Aufgabe, nämlich die Summe aller Zahlen von 1 bis 1000 innerhalb einer vorgegebenen Zeit – natürlich richtig – zu berechnen.

Die ersten kapitulierten bereits beim Addieren der ersten hundert Zahlen, andere wiederum verrechneten sich und gaben dann enttäuscht auf; die meisten aber fanden beim Rechnen kein Ende. Ein Bewerber machte schnell und selbstgefällig wilde Rechnungen, kam aber letztlich zu einem falschen Ergebnis.

Kurz bevor der Wettbewerb beendet sein sollte und der König bereits allen Mut, einen fähigen Schatzmeister zu finden, verloren hatte, trat ein bescheidener junger Bursche in den Saal, schrieb binnen kürzester Zeit einige ausgewählte Zahlen in zwei Reihen, multiplizierte, dividierte und notierte das richtige Ergebnis.

Der König war hocherfreut und ernannte den Burschen noch am gleichen Tag zu seinem Schatzmeister.

Aufgabe 1: *Addiere nach dem Vorbild des neuen Schatzmeisters die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 ohne Taschenrechner.*

Aufgabe 2: *Lies auch den Informationstext auf Blatt 2 und löse dann folgende Additionsaufgaben:*

a) 1 + 2 + 3 + ... + 499 + 500

b) 1 + 2 + 3 + ... + 500 + 501

c) 1 + 2 + 3 + ... + 999 + 1000

d) 1 + 2 + 3 + ... + 1999 + 2000

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

2 Der neue Schatzmeister (Blatt 2)


Karl Friedrich Gauß.

Carl Friedrich Gauß (1777 in Braunschweig geboren) war kein Zauberer, aber bereits als neunjähriger Schüler ein Rechenkünstler, denn es gelang ihm spielend, die Zahlen von 1 bis 100 in kürzester Zeit ohne Anstrengung zu addieren.

Wolfgang Sartorius von Waltershausen überlieferte dazu folgende Begebenheit:

*„Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: „Ligget se'." (Da liegt sie.)**

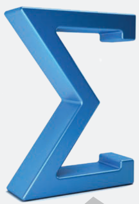
Entsprechend den damaligen Verhältnissen unterrichtete Büttner etwa 100 Schüler in einer Klasse. Damals waren auch Züchtigungen mit der sogenannten Karwatsche (Lederpeitsche) üblich. Sartorius berichtet weiter:

„Am Ende der Stunde wurden darauf die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden, während viele der übrigen falsch waren und alsbald mit der Karwatsche rectificirt wurden."

Gauß hatte das schon in der vorgriechischen Mathematik bekannte Verfahren für die Addition der ersten n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen neu entdeckt und gab allgemein eine Formel zur Berechnung der gesuchten Summe an. Nach ihm wird diese Formel als „Gaußsche Summenformel" bezeichnet.

*Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Summenformel

Für die Summe s gilt: $s = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$



Herleitung der Formel:

$s = 1 + 2 + ... + (n - 1) + n$	Summe
$s = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1$	Summe in umgekehrter Reihenfolge
$2s = (n + 1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$	Additionsverfahren: In jeder der n Spalten beträgt die Summe (n + 1)
$s = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$, was zu zeigen war.	

Aufgabe 3: *Berechne die Summe s der geraden Zahlen von 2 bis 1000.*

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

3 Die Bremer Stadtmusikanten einmal anders betrachtet (Blatt 1)

Aufgabe 1: *Du kennst sicher noch das Märchen von den Bremer Stadtmusikanten. Falls Du die Handlung vergessen hast, lies einfach noch einmal in der Märchensammlung der Brüder Grimm nach. Notiere zwei Rechenaufgaben zu dem Bild oben. Verwende dazu zwei verschiedene Rechenoperationen.*

____

Aufgabe 2: *Nun soll das Märchen so verändert werden, dass sich ein Esel, doppelt so viel Hunde wie Esel, doppelt so viele Katzen wie Hunde und schließlich doppelt so viele Hähne wie Katzen zusammenfinden.*

a) *Wie viele Hähne sitzen oben? Notiere die entsprechende Rechnung unter Verwendung von zwei verschiedenen Rechenoperationen!*

____

____

b) *Wie viele Tiere haben sich insgesamt hier aufgetürmt? Notiere die Rechnung als Summe von Potenzen.*

____

Merke:

$5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5$

$a + a + a = 3 \cdot a$

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

$b \cdot b \cdot b = b^3$

n = Exponent

Potenz — b^n — **b** = Basis

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

14 Würfeln und die Chancen fürs Glück (Blatt 4)

Aufgabe 6: *Welcher Denkfehler liegt der falschen Annahme, dass die Ereignisse „Augensumme 10“ und „Augensumme 9“ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten zugrunde?*

Aufgabe 7: *Schreibe nun jeweils alle Ergebnisse als geordnete Tripel der Augenzahlen, die beim Würfeln mit drei Würfeln zur dem Ereignis „Augensumme 10“ und zu dem Ereignis „Augensumme 9“ gehören auf.*

Augensumme 10: (setze fort)

Augensumme 9:

Aufgabe 8: *Wie viele Ergebnisse geordneter Tripel der Augenzahlen sind beim Werfen von drei Würfeln insgesamt möglich?*

Aufgabe 9: *Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Augensumme 9“ und „Augensumme 10“.*

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

15 Das Glück mit einem Baum berechnen (Blatt 1)

Als Geburtsstunde der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt das Jahr 1654. Chevalier de Méré, ein Philosoph und Literat am Hofe Ludwigs des XIV., wandte sich mit folgender Frage an den bekannten Mathematiker Blaise Pascal:

„Was ist wahrscheinlicher, bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine ‚6' zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine ‚Doppelsechs'?"

Beide Probleme waren damals schon viele Jahrhunderte alt. Alle früheren Lösungen waren aber falsch.

Aufgabe 1: *Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine „Sechs" zu werfen.*

a) Nutze dazu auch das unten abgebildete Baumdiagramm und rechne mit den Pfadregeln.

____

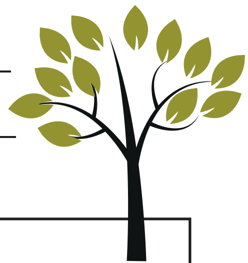
____

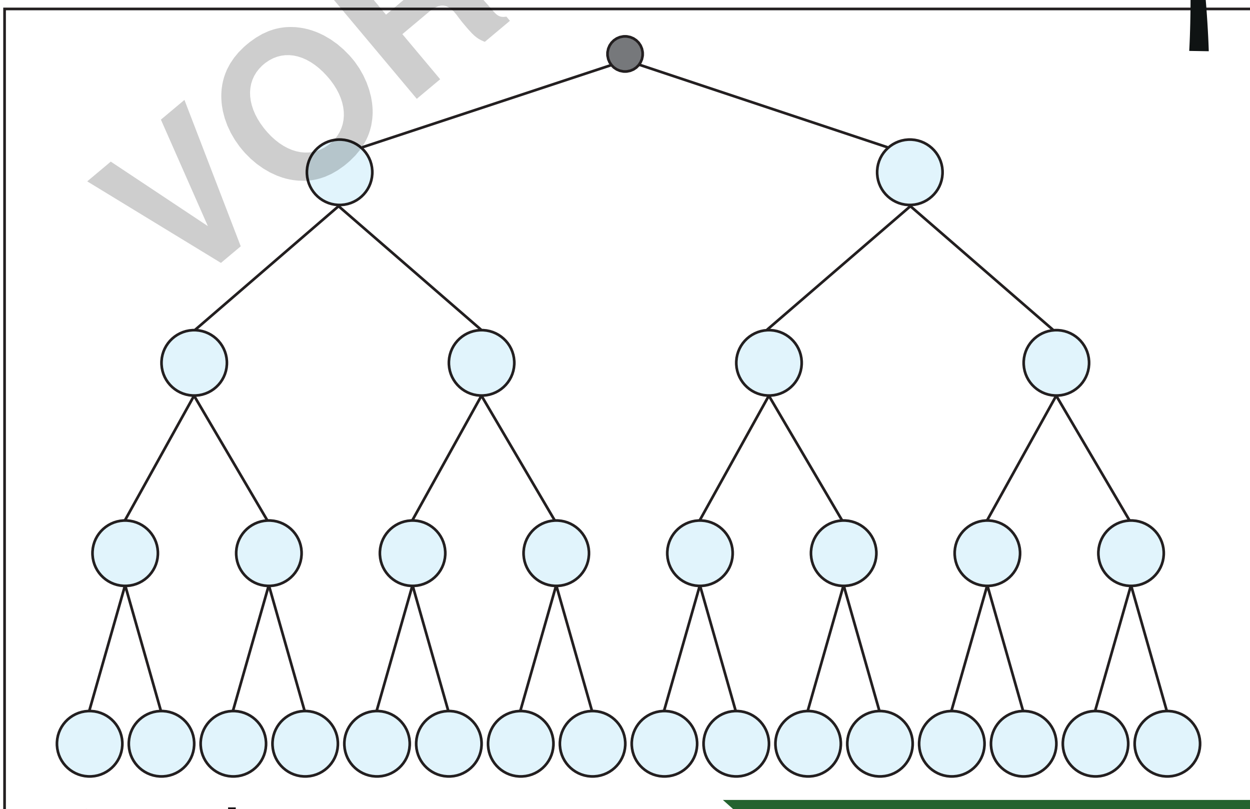
____

b) Auch ohne Baumdiagramm ist eine einfache Berechnung möglich, wenn du mit dem Gegenereignis $\bar{E}$ arbeitest.

Wie heißt das Gegenereignis? __________________________

____



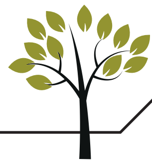


Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

15 Das Glück mit einem Baum berechnen (Blatt 2)

Aufgabe 2: *Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 24 Würfen mit zwei Würfeln eine „Doppelsechs“ zu werfen (im Sinne von mindestens eine Doppelsechs).*

a) *Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, bei 2 Würfen mit zwei Würfeln eine „Doppelsechs“ zu erzielen. Skizziere dazu ein geeignetes Baumdiagramm (freien Raum für eine eventuelle Ergänzung der dritten Stufe zur Bearbeitung der Aufgabe b lassen) und nutze zur Berechnung die Pfadregeln.*



b) *Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, bei drei Würfen mit zwei Würfeln eine „Doppelsechs“ zu erzielen. Ergänze das Baumdiagramm.*

c) *Bestimme nun die Wahrscheinlichkeit dafür, bei vierundzwanzig Würfen mit zwei Würfeln eine "Doppelsechs" zu werfen, rechnerisch und nimm Stellung zu der 1654 von Chevalier de Méré an Blaise Pascal gerichteten Frage.*

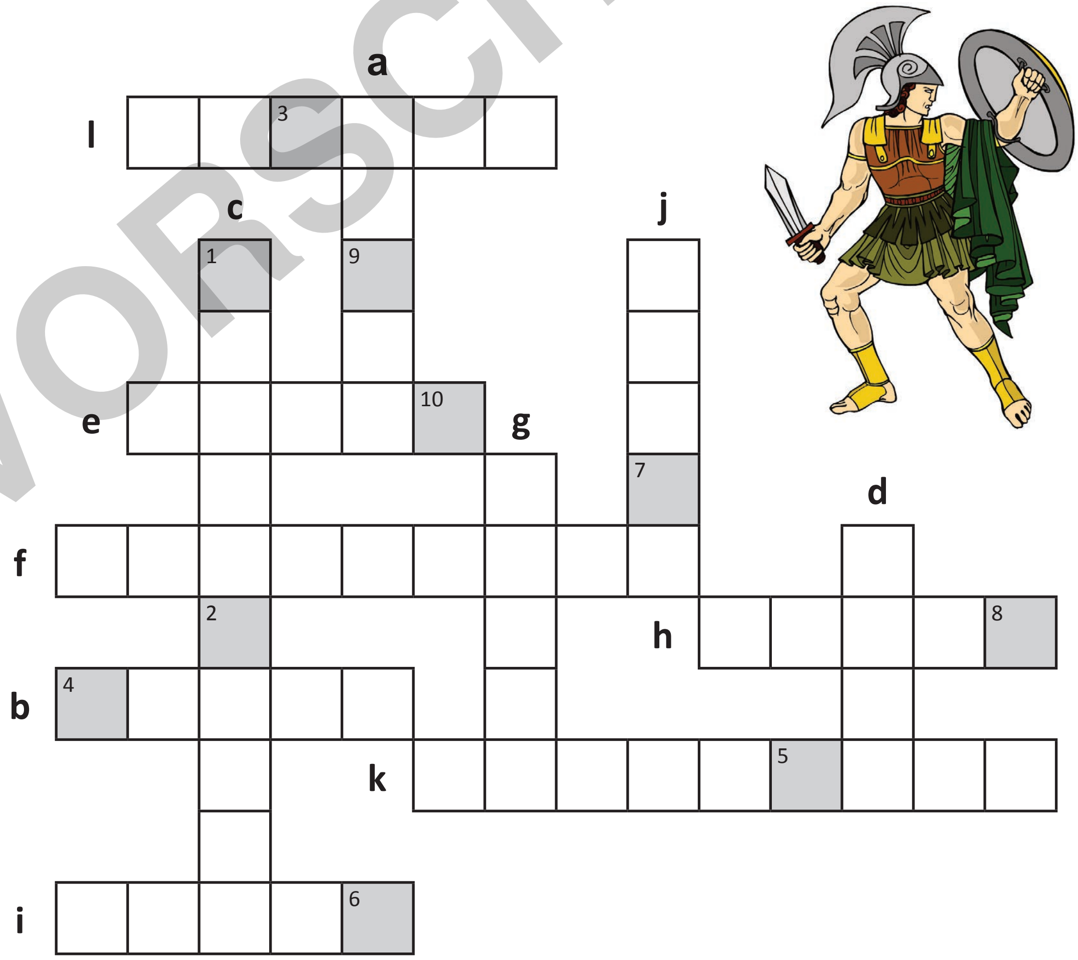
Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

24 Rätsel um Achilles – Aus der griechischen Mythologie (Batt 2)

Aufgabe 1: *Lies den Informationstext auf Blatt 1 und löse anschließend das folgende Rätsel. Informiere dich auch in Nachschlagewerken und im Internet über die Achillessage. Die Buchstaben in den dunkel markierten Feldern ergeben, wenn du sie in die richtige Reihenfolge bringst, das Lösungswort.*

Rätselfragen

a. Die (...?) ist eine der berühmtesten Sagen.
b. (..?) gilt als bedeutender Dichter der Antike.
c. Achilles ist der Sohn der (...?) Thetis.
d. In der griechischen Sage heißt der Unterweltfluss (...?).
e. Außer seiner (…?) war der Körper des Helden Achilles unverwundbar.
f. Der Knabe Achilles wurde von dem (...?) Cheiron erzogen.
g. Im Kampf um (...?) erwarb Achilles großen Ruhm.
h. Achilles war stark und (...?).
i. Ein (...?) verwundete Achilles tödlich an der Ferse.
j. Der Philosoph (...?) von Elea beschreibt einen imaginären Wettlauf von Achilles mit einer Schildkröte.
k. Eine Aussage oder Schlussfolgerung, die unerwartet oder unglaubwürdig eintritt, nennt man (...?).
l. Die Epoche, in der Achilles lebte, heißt (...?).

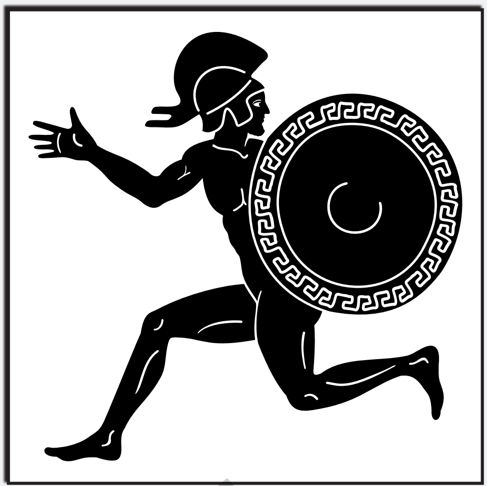


Lösungswort:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Mathematik in Märchen, Geschichten und wahren Begebenheiten - eine Wühlkiste - Bestell-Nr. P12 234
KOHL VERLAG

25 Das Paradoxon vom Wettlauf des Achilles mit einer Schildkröte (Blatt 1)



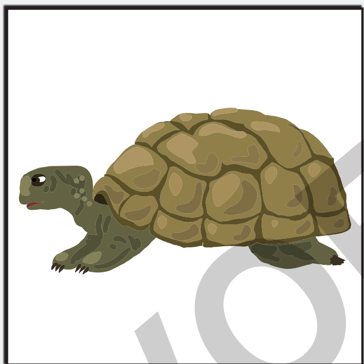
Der griechische Philosoph ZENON von Elea (490 bis 430 v. Chr.) ist bekannt für eine Reihe von Paradoxa (griech.: widersinnige Behauptungen). Das bekannteste davon ist das Paradoxon von ACHILLES und der Schildkröte.

ZENON behauptet darin, dass ACHILLES – welcher unter anderem wegen seiner Schnelligkeit berühmt war – eine Schildkröte, die einen Vorsprung von einem Stadion habe, niemals einholen könne, obwohl er mit der zehnfachen* Geschwindigkeit wie diese laufe.

Nach dem Denkmodell von Zenon wird dieser unendlich währende Wettlauf wie folgt beschrieben: Nachdem Achilles die Strecke von einem Stadion – also genau den Vorsprung – zurückgelegt hat, ist die Schildkröte um 1/10 Stadien weiter „geeilt“ und wenn Achilles diese Strecke von 1/10 Stadien bewältigt hat, ist ihm die Schildkröte bereits 1/100 Stadien voraus; also eine unendliche Geschichte. Achilles nähert sich der Schildkröte immer mehr, ohne sie einzuholen.

Das Paradoxe ist, dass dieser logische Schluss jeglicher praktischen Erfahrung widerspricht, womit Zenon möglicherweise die Unzulänglichkeit der Mathematik nachweisen wollte.

Bei Voraussetzung der Tatsache, dass Achilles die Schildkröte einholt und sich sowohl Achilles als auch die Schildkröte gleichförmig bewegen, lässt sich die Strecke bis zum Treffpunkt bei Anwendung des aus der Physik bekannten Weg-Zeit-Gesetzes der gleichförmigen Bewegung mit einem einfachen Gleichungssystem berechnen.



Betrachtet man die von Achilles nach Zenons Modell zurückgelegten Wegabschnitte, so erhält man eine unendliche geometrische Reihe. Erst mit Entwicklung der Infinitesimalrechnung und der Einführung des mathematischen Grenzwertbegriffes „lim“ konnte man auch die von Zenon aus unendlich vielen Abschnitten beschriebene Wegstrecke des Achilles im Wettlauf mit der Schildkröte zu einem berechenbaren Ende führen.

* In anderen Überlieferungen ist von der zwölffachen Geschwindigkeit die Rede.

Aufgabe 1: *Wie lang (Angabe in Metern) ist eine Strecke, welcher in der Antike die Einheit „1 Stadion“ zugeschrieben wurde?*

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der antiken Längeneinheit und dem Begriff „Stadion“ als Austragungsort von Sportwettkämpfen?

Informiere dich in Nachschlagewerken oder im Internet.

____

____

____

____

____