Stochastik

Rosinen, Nüsse und ein Kioskalltag – Aufgabensammlung zur Stochastik

Alfred Müller, Coburg
Illustrationen von: Dr. Wolfgang Zettlmeier

© Maria Teijeiro/DigitalVision/GettyImages

Mathematik ist ein Schlüssel für das Verständnis der Welt und ihrer Entwicklung. In unserer durch Information gesteuerten Gesellschaft, deren Basis explosionsartig zunehmendes Wissen und dauernde Veränderungen sind, spielt die Mathematik eine entscheidende Rolle. Insbesondere im Bereich *Stochastik* liegt die Verknüpfung der Inhalte zum praktischen Leben auf der Hand.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr:	11/12 (G8), 11–13 (G9)
Dauer:	2 Unterrichtsstunden, evtl. Hausaufgabe
Kompetenzen:	1. mathematische Texte erfassen, 2. Analyse und Anwendung der zutreffenden Formeln und Lösungsschritte, 3. Lösungen berechnen und Ergebnisse reflektieren, 4. Beweise führen
Thematische Bereiche:	Ereigniswahrscheinlichkeiten, Binomialverteilung, Vierfeldertafel

Didaktisch-methodische Hinweise

Zur Einzel- oder Partnerarbeit oder auch für ein Unterrichtsgespräch geeignet
Die beiden Aufgaben zur Binomialverteilung können Sie entweder direkt nach der Besprechung im Unterricht zur Einübung oder nach einiger Zeit zur Wiederholung der relevanten Gedankengänge und Formelanwendungen verwenden. Auf saubere Argumentierungen, auf notwendige Folgerungen und die Formulierung eines Lösungssatzes sollten Ihre Schüler achten. Die gewählte Unterrichtsform (Unterrichtsgespräch, Stillarbeit, Partnerarbeit) beeinflusst den zeitlichen Rahmen.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K1, K2, K4, K5	L4, L5	… lösen Aufgaben zur Binomialverteilung.	II, III

Abkürzungen
Kompetenzen
K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)
Leitideen
L 1 (Zahl und Zahlbereich); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)
Anforderungsbereiche
I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

Auf einen Blick

1./2. Stunde

Thema: **Die Binomialverteilung**

M 1 (Ab) Rosinen, Nüsse etc. – Einstiegsaufgaben
M 2 (Ab) Kioskalltag – Vertiefungsaufgaben

Benötigt: ☐ Taschenrechner

Rosinen, Nüsse etc. – Einstiegsaufgaben

M 1

Suchen Sie sich einen Partner und arbeiten Sie mit diesem zusammen!

Aufgaben

1.1 50 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 25 Brötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man in einem zufällig ausgewählten Brötchen

a) wenigstens eine Rosine, b) weniger als drei Rosinen, c) mehr als drei Rosinen findet?

1.2 Wie viele Rosinen müssen in den Teig von 25 Brötchen mindestens geknetet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens eine Rosine in dem zufällig gewählten Brötchen zu finden?

1.3 15 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 50 Brötchen geknetet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 1 Brötchen mit mehr als einer Rosine gibt?

1.4 Erstellen Sie zum Ansatz $P(E) = \dfrac{\frac{30!}{(30-20)!}}{30^{20}}$ eine Aufgabe zum Rosinen-Brötchen-Problem.

2. Unter das Rohmaterial von 100 Tafeln Schokolade werden 600 ganze Nüsse gemischt.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer fertigen Tafel Schokolade

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3, e) mehr als 3 ganze Nüsse zu finden?

Welche Anzahlen weisen unter den 100 Tafeln diese Eigenschaften auf?

2.2 Genau dann, wenn sich in einer Tafel Schokolade mindestens drei Nüsse finden, darf diese als 1. Qualität verkauft werden. Wie groß ist die Ausschussquote?

2.3 Die Ausschussquote soll weniger als 5 % betragen.

a) Wie viele Nüsse müssen jetzt in einer Tafel Schokolade zu finden sein?

b) Wie wahrscheinlich ist eine Tafel mit acht ganzen Nüssen?

c) Wie wahrscheinlich erhält man eine Tafel Schokolade mit der erwarteten Anzahl von Nüssen?

2.4 Bei einer Kontrolle von weiteren 100 Tafeln Schokolade werden 13 ohne Nüsse aussortiert. Wie viele Nüsse wurden in dieses Schokorohmaterial eingerührt?

3.1 Eine Schule hat 1000 Schüler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) keiner, b) einer, c) mehr als zwei Schüler am 13. April geboren sind?

3.2 Von wie vielen Tagen des Jahres erwartet man, dass an ihnen keiner der 1000 Schüler Geburtstag hat?

3.3 An einer anderen Schule hat man festgestellt, dass sogar 50 Tage nicht als Schülergeburtstage vertreten sind. Wie viele Schüler hat diese Schule?

4. In der Klasse 8a befinden sich 25 Schüler.

4.1 Es werden 50 Preise rein zufällig verlost. Wie groß ist der Anteil der Schüler, die keinen Preis erhalten?

4.2 Es werden 10 Preise rein zufällig verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens einen Schüler gibt, der mehr als einen Preis erhält?

4.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der Schüler am gleichen Tag Geburtstag?

M 2 Kioskalltag – Vertiefungsaufgaben

Aufgaben

1. Dem Pächter Kunze des Kiosks am Schlossplatz ist bekannt, dass von seinen Gästen die drei angebotenen Speisen unabhängig voneinander mit den angegebenen Wahrscheinlichkeiten gegessen werden:
N: „Spaghetti" mit P(N) = 0,6, R: „Pizza" mit P(R) = 0,3 und S: „Salat" mit P(S) = 0,1.

1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Gast an zwei aufeinanderfolgenden Tagen das gleiche Gericht isst.

1.2 Ein Gast wird zufällig ausgewählt und seine Speisenwahl an fünf aufeinanderfolgenden Tagen beobachtet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit isst er
A: „Viermal Spaghetti und einmal Salat",
B: „Keinen Salat",
C: „Immer Pizza",
D: „Die Reihenfolge NRSNR",
E: „Zweimal N, zweimal R und einmal S"?

1.3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den nächsten zehn gewählten Speisen
a) mindestens zweimal,
b) genau einmal Salat?

1.4 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei den nächsten gewählten Speisen
a) die vierte,
b) frühestens die fünfte,
c) spätestens die achte gewählte Speise der erste Salat?

2. Herr Kunze verkauft auch Zeitungen und Brötchen. Aus Erfahrung weiß er, dass 30 % aller Kunden eine Zeitung kaufen, 40 % von denen nehmen auch Brötchen mit, während 42 % aller Kunden weder eine Zeitung noch Brötchen kaufen.

2.1 Überprüfen Sie, ob die Ereignisse E1: „Kunde kauft Zeitung" und E2: „Kunde kauft Brötchen" stochastisch unabhängig sind.

2.2 Von den letzten 50 Kunden haben
a) 20 weder eine Zeitung noch Brötchen,
b) mehr als 20 Brötchen,
c) weniger als 15 eine Zeitung gekauft.
Wie wahrscheinlich sind diese Ereignisse?

2.3 Wie viele hintereinander ankommende Kunden muss man mindestens beobachten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einen zu finden, der Brötchen kauft?

3. Herr Kunze beabsichtigt einen Glücksspielautomaten aufzustellen. Davor überlegt er:
Wie groß müsste der Anteil p der Glücksspieler unter den Kunden mindestens sein, damit unter 20 zufällig ausgewählten Kunden mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % wenigstens einer am Automaten spielt?

Lösungen

M 1 Rosinen, Nüsse etc. – Einstiegsaufgaben

1.1 Jede der 50 Rosinen hat 25 Brötchen zur Auswahl, d. h., die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{25} = 0{,}04$, in eines der Brötchen zu kommen.
Wenn die Zufallsgröße Z die Anzahl der Rosinen in einem Brötchen angibt, dann ist Z binomialverteilt mit n = 50 und p = 0,04.
Die folgenden gesuchten Wahrscheinlichkeiten wurden mithilfe des Tabellenwerkes bestimmt.

1.1 a) $B^{50}_{0,04}(Z \geq 1) = 1 - B^{50}_{0,04}(Z = 0) \approx 1 - 0{,}12989 = 0{,}87011 \approx 87{,}01\ \%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,01 % befindet sich in dem zufällig ausgewählten Brötchen wenigstens eine Rosine.

1.1 b) $B^{50}_{0,04}(Z < 3) = B^{50}_{0,04}(Z \leq 2) \approx 0{,}67671 \approx 67{,}67\ \%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,67 % befinden sich in dem zufällig ausgewählten Brötchen weniger als drei Rosinen.

1.1 c) $B^{50}_{0,04}(Z > 3) = 1 - B^{50}_{0,04}(Z \leq 3) \approx 1 - 0{,}86087 = 0{,}13913 \approx 13{,}91\ \%$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 13,91 % befinden sich in dem ausgewählten Brötchen mehr als drei Rosinen.

1.2 Die Zufallsgröße Z gebe die Anzahl der Rosinen in einem Brötchen an. Z ist binomialverteilt mit p = 0,04 und unbekanntem n. Es soll gelten:

$B^{n}_{0,04}(Z \geq 1) > 0{,}95$

$1 - B^{n}_{0,04}(Z = 0) > 0{,}95$

$B^{n}_{0,04}(Z = 0) < 0{,}05$

$0{,}96^n < 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}96 < \ln 0{,}05 \qquad | : \ \ln 0{,}96 < 0 \ (!)$

$\Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}96} \approx 73{,}39 \quad \Rightarrow \quad n \geq 74$

Es müssen mindestens 74 Rosinen in den Teig geknetet werden.

1.3 Jede der 15 Rosinen kann auf eines der 50 Brötchen kommen, d. h., es gibt $|\Omega| = 50^{15}$ Möglichkeiten der Verteilung. Soll jedes Brötchen höchstens eine Rosine haben, dann gibt es $\frac{50!}{(50-15)!}$ Möglichkeiten. Mit dem Gegenereignis zu „höchstens ein" erhält man

$$P(E') = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{\frac{50!}{(50-15)!}}{50^{15}} = 1 - \frac{\frac{50!}{35!}}{50^{15}} = \ldots \approx 1 - 0{,}09645 = 0{,}90355 \approx 90{,}36\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens ein Brötchen mit mehr als einer Rosine gibt, beträgt 90,36 %.

1.4 $P(E) = \frac{\frac{30!}{(30-20)!}}{30^{20}}$: 20 Rosinen werden gleichmäßig in den Teig von 30 Brötchen geknetet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Ereignis E ein, dass sich in jedem Brötchen höchstens eine Rosine befindet?

2.1 Jede Nuss hat 100 Tafeln Schokolade zur Auswahl, d. h., die Wahrscheinlichkeit, in eine der Tafeln zu kommen, beträgt $p = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Wenn die Zufallsgröße Z die Anzahl der ganzen Nüsse angibt, dann ist Z binomialverteilt mit n = 600 und p = 0,01.
Gesucht sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten, die mithilfe des Taschenrechners bestimmt werden.