

Wahlen im Statistikunterricht

Antonia Zeimetz, Offenbach

Illustrationen von: Christoph Grundmann und Dr. Wolfgang Zettlmeier



© RAABE 2019

© ericsphotography/E+/Getty Images Plus

Am Sonntag, den 26. Mai 2019, wurde in vielen Städten, so z. B. in Stuttgart, dreimal gewählt: Europa-, Regional- und Gemeinderatswahl. Auch der Brexit beschäftigt viele Bürger. Nutzen Sie diese Themen für einen praxisorientierten Einstieg in die beschreibende und schließende Statistik.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe/Lernjahr: 11 bis 13 (G9)

Dauer: ca. 14 Unterrichtsstunden für das Gesamtmaterial, Materialien sind auch einzeln einsetzbar

Kompetenzen: Anwendungen aus der beschreibenden und schließenden Statistik rund um das Thema Wahlen, insbesondere zu Baumdiagrammen und bedingten Wahrscheinlichkeiten, Hypothesentests und Konfidenzintervallen; kritisch-konstruktive Reflexion der Demoskopie sowie ihrer Werkzeuge

Thematische Bereiche: Stochastik, Wahlergebnisse, Hypothesentests

Medien: Texte, 1 Farbfolie, Bilder

Didaktisch-methodisches Konzept

Die vorliegenden Unterrichtsmaterialien knüpfen an Themen an, die im aktuellen politischen Diskurs immer wieder auftauchen, z. B.:

- Wie gut können Demoskopien Wahlergebnisse überhaupt vorhersagen?
- Wie tendenziös sind Wahlumfragen?
- Sind Deutschlands Meinungsforschungsinstitute parteiisch?

Hierbei wird das Ziel verfolgt, dass Ihre Schüler durch die Auseinandersetzung mit echten Daten und Problemen in die Lage versetzt werden, die Statistiken, die uns als Bürger im täglichen Leben begegnen, eigenständig kritisch zu reflektieren. Im beruflichen und gesellschaftlichen Leben wird man nahezu täglich mit Daten und Wahrscheinlichkeitsaussagen konfrontiert. Daher muss sich diese Entwicklung auch im Mathematikunterricht widerspiegeln.

Lehrplanbezug

Die Beispiele sind so gewählt, dass typische Inhalte aus den Kernlehrplänen der Oberstufe aufgegriffen werden. Das Kerncurriculum (Qualifikationsphase) für die hessische Oberstufe dient hier als Beispiel:

- Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Entwickeln einseitiger Hypothesentests: Festlegen der Hypothesen, Ermitteln von Entscheidungsregeln zu vorgegebenen Signifikanzniveaus
- Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten (auf Grundlage der Sigma-Regeln): Schließen von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Bestimmen von Konfidenzintervallen in verschiedenen Sachzusammenhängen

Allgemeine mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler können ...	Anforderungsbereich
K4, K5	L 5	... Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen (M 2/M 8).	I/II
K1, K6	L 5	... Hypothesentests durchführen und interpretieren sowie die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (M 3/M 5/M 8).	II/III
K3	L 5	... Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden (M 4).	I/II
K2, K1, K6	L 5	... von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit schließen und die Genauigkeit von solchen Aussagen beurteilen (M 5/M 6/M 8).	II/III

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden **CD-ROM 75**.

Auf einen Blick

1. Stunde: Diagramme kritisch prüfen

Inhalt: Gängige Strategien (Abschneiden der y-Achse, Wahl des Zeitraums und der Daten) zum interesselgeleiteten Einsatz von Statistiken werden entlarvt und erprobt. Einsatz einer Tabellenkalkulation, Internetrecherche.

M 1 **Manipulative Statistiken entlarven**

Kompetenzen: Die Schüler erkennen den Einsatz manipulativer Strategien bei Diagrammen und formulieren eine Checkliste zur Analyse von Statistiken.

2./3. Stunde: Daten, Baumdiagramme und die Pfadmultiplikationsregel

Inhalt: Daten mithilfe von Baumdiagrammen strukturieren. Echte Daten zum Thema „Wahlen“ werden durch den Einsatz von Baumdiagrammen und den zugehörigen umgekehrten Baumdiagrammen strukturiert.

M 2 **Daten mithilfe von Baumdiagrammen strukturieren**

Kompetenzen: Die Schüler strukturieren Daten mithilfe von Baumdiagrammen. Sie nutzen umgekehrte Baumdiagramme zur Ermittlung der bedingten Wahrscheinlichkeiten.

4./5. Stunde: Anwendung von Hypothesentests

Inhalt: Die Schüler untersuchen, ob bestimmte Parteien von Meinungsforschungsinstituten bei den letzten Landtagswahlen systematisch über- oder unterschätzt wurden. Anknüpfend an die Ergebnisse wird hinterfragt, welche Schlüsse man anhand von signifikanten Ergebnissen ziehen kann.

M 3 **Wie tendenziös sind Wahlumfragen?**

Kompetenzen: Die Schüler führen einen geeigneten Hypothesentest durch und reflektieren die Aussagekraft des innermathematischen Ergebnisses.

6./7. Stunde: Prognosen erstellen: Mit einer Tabellenkalkulation (z. B. Excel) statistische Auswertungen vornehmen

Inhalt: Anhand einer Simulation der „Sonntagsfrage“ mithilfe von Excel erkennen die Schüler das Auftreten von Zufallsschwankungen bei Umfragen und schärfen diesbezüglich ihre Intuition.

M 4 **Wie genau können wir ein Wahlergebnis vorhersagen, wenn wir 1000 Wahlberechtigte vorab befragen?**

Kompetenzen: Die Schüler nutzen eine Modellierung, um zu untersuchen, ob Umfragen geeignet sind, um Wahlergebnisse zu prognostizieren. Sie erkennen die statistischen Schwankungen einer repräsentativen Stichprobe, wenn 1000 Personen befragt werden.

8./9. Stunde: Mit Konfidenzintervallen Umfrageergebnisse prüfen

Inhalt: Von der Stichprobe zur Grundgesamtheit: Anhand der letzten Wahlumfragen in Großbritannien vor dem Brexit werden Konfidenzintervalle eingeführt. Die Schüler erkennen, dass von rund 1500 möglichen Wählern nicht exakt auf eine Wählerschar von 33 Millionen Personen geschlossen werden kann, sondern dass eine Fehlertoleranz angegeben werden muss.

M 5 **Warum kam der Brexit so überraschend?**

Kompetenzen: Die Schüler analysieren die Zufallsschwankungen bei Umfragen und nutzen Konfidenzintervalle, um diese einschätzen zu können.

10./11. Stunde: Das Konfidenzintervall verstehen



Inhalt: Aus Erfahrung wissen die Schüler, dass die Prognosen um 18 Uhr bereits sehr gute Ergebnisse liefern. Warum sind diese Daten so viel besser als die der Sonntagsfragen im Vorfeld von Wahlen? In einer arbeitsteiligen Gruppenarbeit wird untersucht, welchen Einfluss die Stichprobengröße auf die Größe des Konfidenzintervalls hat.

M 6: **Warum ist das Ergebnis am Wahlabend so gut? – Das Konfidenzintervall**

Kompetenzen: Die Schüler wenden Konfidenzintervalle an, um zu untersuchen, wie sich die Zufallsschwankungen ändern, wenn die Anzahl der Befragten variiert wird. Durch die Analyse aller Ergebnisse finden die Schüler ein Muster: das „Eins durch Wurzel aus n“-Gesetz.

12. Stunde: Paradoxien bei Wahlverfahren – Szenarien durchspielen

Inhalt: In Partnerarbeit erarbeiten die Schüler zwei verschiedene Paradoxien, die bei Wahlverfahren auftreten. Hier werden Verbindungen zum Politikunterricht (Mehrheits- und Verhältniswahlrecht) hergestellt.



M 7A **Paradoxien – Hillary Clinton erhält 2.868.686 Stimmen mehr als Donald Trump, aber verliert die Wahl**



M 7B **Paradoxien bei Wahlverfahren – „Simpson’s Party“ verbessert ihr Ergebnis in allen Wahlkreisen**

Kompetenzen: Die Schüler analysieren das Mehrheits- und Verhältniswahlrecht mathematisch und lösen die zugehörigen Paradoxien auf.

13./14. Stunde: Lernerfolgskontrolle: Was kann ich schon? – Intelligentes Üben

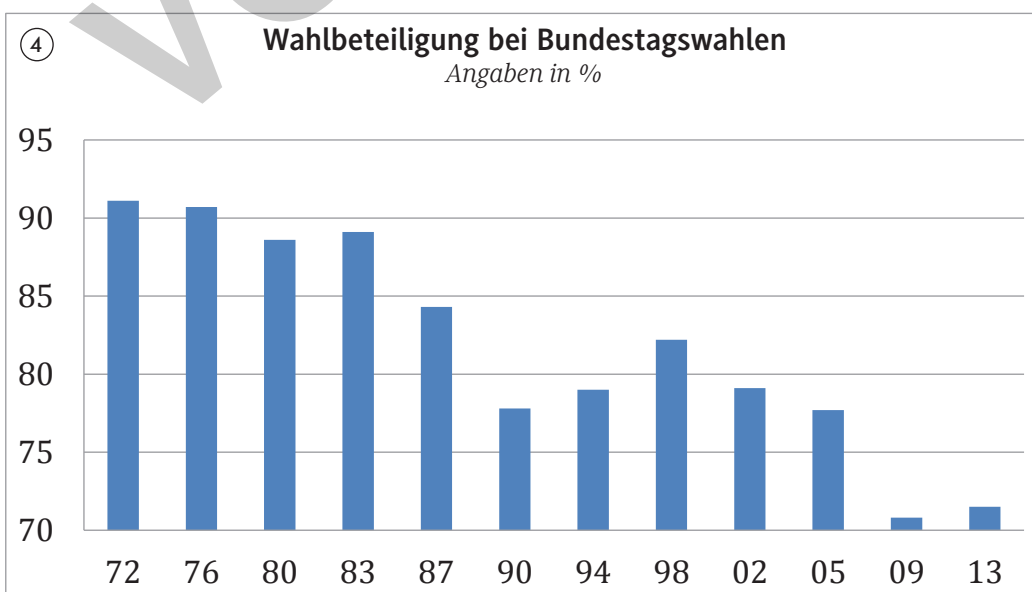
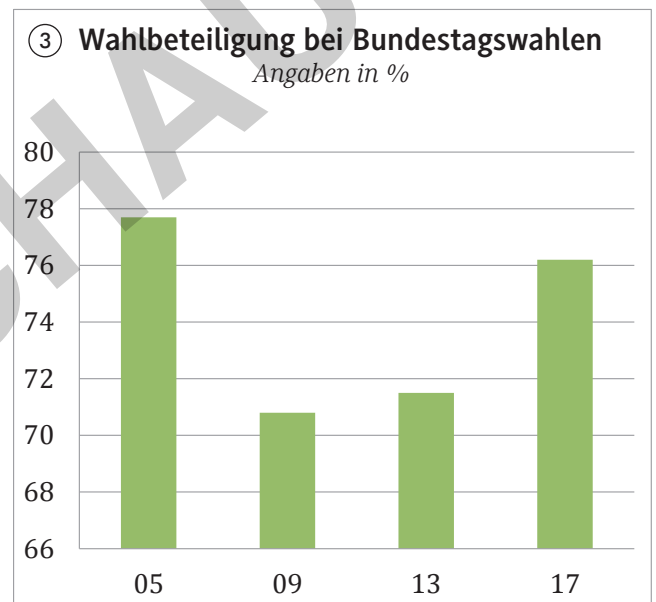
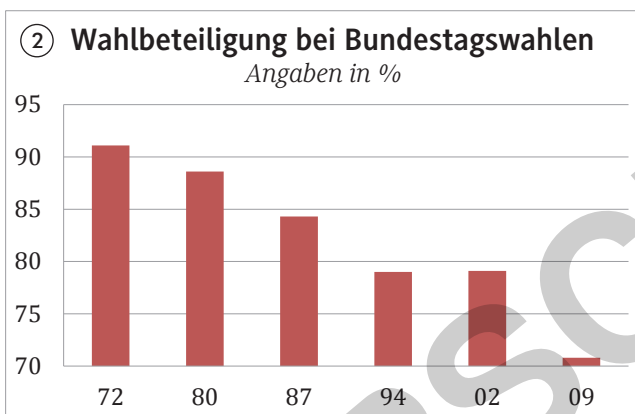
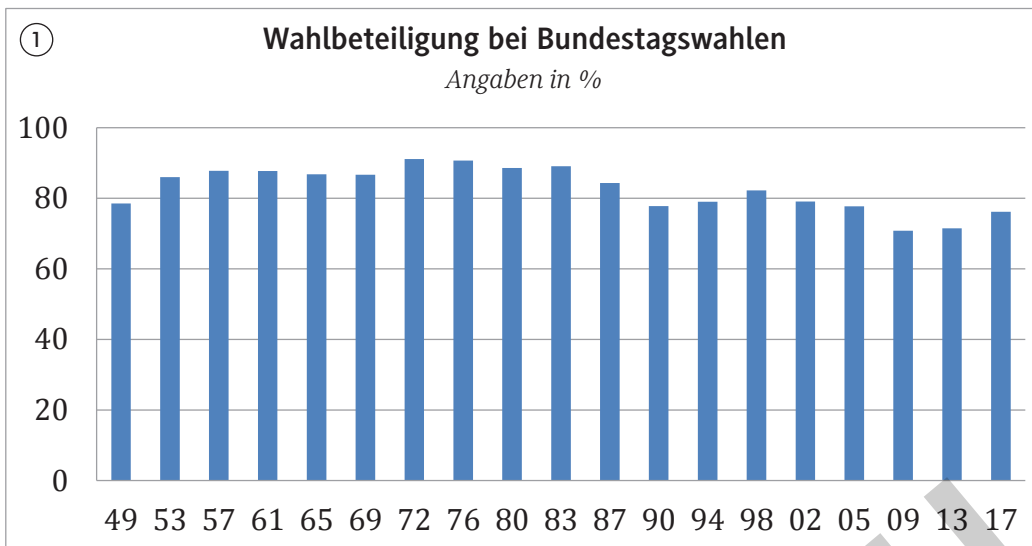
Inhalt: Selbsteinschätzungsbogen und passendes Übungsmaterial zur Reflexion des Lernprozesses, Selbstkontrolle anhand der Lösungen.

M 8 **Was kann ich schon? – Intelligentes Üben**

Kompetenzen: Die Schüler reflektieren ihren Leistungsstand anhand eines Selbsteinschätzungsbogens. Sie wählen gemäß ihres Könnens eigenverantwortlich passendes Aufgabenmaterial aus.

Manipulative Statistiken entlarven

M 1



Quelle: Der Bundeswahlleiter.
Ergebnisse früherer
Bundestagswahlen.

© RAABE 2019



Daten mithilfe von Baumdiagrammen strukturieren

M 2

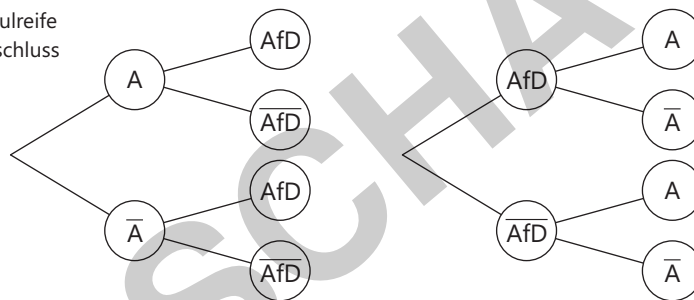
Abiturienten wählen seltener die AfD
 Unter denjenigen, die mit einem höheren Bildungsabschluss (Fachhochschulreife oder Abitur) die Schule verlassen, beträgt die Quote der AfD-Wähler rund 11 %. Im Vergleich hierzu liegt der Anteil der AfD-Wähler unter allen, die einen niedrigeren oder keinen Schulabschluss erzielt haben, bei 15 % und ist damit um mehr als ein Drittel erhöht. Von den Befragten haben 38 % eine Fachhochschulreife oder ein Abitur.

Nicht nur bildungsferne Schichten wählen die AfD
 Bei der Bundestagswahl 2017 wurde die AfD drittstärkste Partei und erzielte rund 13 % der abgegebenen Stimmen. Ihre Wählerschaft ist heterogen und besteht nicht nur aus bildungsfernen Schichten, denn 31 % der AfD-Wähler legten die Hochschul- oder Fachhochschulreife ab. 39 % derjenigen, die nicht für die AfD stimmten, haben ebenfalls einen höheren Schulabschluss.

Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass beide Meldungen auf den gleichen Daten beruhen. Ergänzen Sie dazu die Baumdiagramme.

- A: Abitur oder Fachhochschulreife
- \bar{A} : kein höherer Bildungsabschluss
- AfD: AfD-Wähler
- $\overline{\text{AfD}}$: anderer Wähler



b) Entscheiden Sie jeweils begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	w	f
1. 4 % der Stimmen kommen von AfD-Wählern mit höherem Bildungsabschluss.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. Der Anteil der AfD-Wähler ist bei denjenigen ohne höheren Schulabschluss im Vergleich zu denjenigen mit einem höheren Schulabschluss um mehr als 35 % erhöht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. Der prozentuale Anteil der Absolventen, die mindestens einen Fachhochschulabschluss erzielten, ist bei den Wählern, die nicht für die AfD stimmten, um ca. 20,5 % erhöht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. Unter allen, die nicht die AfD wählen, ist der Anteil derjenigen ohne Abitur/Fachhochschulreife um ca. 56 % größer als der Anteil derjenigen mit höherem Abschluss.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

AfD bei Jungwählern unbeliebter

Bei der Bundestagswahl 2017 erhielt die AfD knapp 13 % der Stimmen. Nur 2 % der Wählerschaft gehörte zu den Jungwählern (18 bis 29 Jahre) und wählte die AfD. 70 % aller Stimmen kamen von über 29-Jährigen, die nicht für die AfD votierten.

c) Stellen Sie die Situation mithilfe eines Baumdiagramms dar und ergänzen Sie die fehlenden Werte. Entscheiden Sie anschließend, in welcher Altersgruppe die AfD beliebter ist.

Tipp: Erstellen Sie hierzu das umgekehrte Baumdiagramm.

Quelle: YouGov. *Parteienanatomie der AfD – Das Innenleben der AfD-Wählerschaft.* (aufzurufen unter: https://campaign.yougov.com/DE_2017_08_Political_AFD_Anatomie_DE_2017_06_Political_SPD_Anatomie_Landing.html, zuletzt aufgerufen am: 17.07.2019)

Wie genau können wir ein Wahlergebnis vorhersagen, wenn wir 1000 Wahlberechtigte vorab befragen?

M 4

In den letzten Jahren gab es national und international immer wieder überraschende Wahlausgänge: im Saarland, in den USA und bei dem Referendum zum Brexit. Anschließend gerieten Demoskopien wiederholt in die Kritik. War das gerechtfertigt? Beispielsweise erhielt die CDU bei der Landtagswahl 2017 in NRW rund 33 % der abgegebenen Stimmen. Können Meinungsforschungsinstitute dies prognostizieren, wenn sie – wie üblich – vorab etwa 1000 Personen interviewen? Inwiefern können sie vorab überhaupt verlässliche Umfragen zum Ausgang einer Wahl liefern? Um erste Antworten auf diese Fragen zu finden, wird eine Wahlprognose simuliert und analysiert.

Aufgabe

- a) Öffnen Sie die Datei „**Wahlen_NRW.xlsx**“ (CD-ROM 75). Für jeden Wähler (1000 pro Institut) wurde eine Zufallszahl zwischen 0 und 100 ermittelt. Liegt die Zahl zwischen 0 und 33,0, so zählt diese als Stimme für die CDU, da die CDU 33,0 % der Stimmen erhielt. Die nächstgrößte Partei, die SPD, erlangte 31,2 % der Stimmen. Liegt die Zufallszahl zwischen 33,0 und 64,2 (der Summe aus 33 und 31,2), so wird dies als Stimme für die SPD gezählt. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, um die Ergebnisse der anderen Parteien zu simulieren. Da hier von den Wahlergebnissen ausgegangen wird, sind die Voraussetzungen von der Schätzung optimal, denn anders als bei Umfragen wissen alle simulierten Wähler, ob sie zur Wahl gehen und wen sie wählen, sie lügen nicht und werden zufällig ausgewählt. Um die Güte der Wahlprognose beurteilen zu können, werden die Ergebnisse von zehn Instituten simuliert und in der Tabelle (unten) zusammengefasst. Wenn Sie die Taste „**F9**“ drücken, werden alle Werte neu berechnet. Betrachten Sie die Ergebnisse in der Tabelle und vergleichen Sie diese mit dem amtlichen Wahlergebnis. Dieses finden Sie ebenfalls in der Tabelle direkt unter dem Parteienamen. Lassen Sie die Ergebnisse mehrmals neu berechnen (F9).



Wie groß sind die Schwankungen der Wahlergebnisse?

- b) Untersuchen Sie nun die folgende Simulation detailliert. Beantworten Sie dazu die Fragen.

Ergebnis	CDU (33,0)	SPD (31,2)	FDP (12,6)	AfD (7,4)	Grüne (6,4)	Linke (4,9)
Institut1	0,353	0,324	0,109	0,071	0,052	0,04
Institut2	0,317	0,302	0,107	0,094	0,063	0,052
Institut3	0,336	0,305	0,116	0,078	0,066	0,045
Institut4	0,321	0,305	0,126	0,073	0,074	0,051
Institut5	0,35	0,299	0,121	0,072	0,067	0,048
Institut6	0,33	0,315	0,108	0,068	0,068	0,048
Institut7	0,315	0,302	0,134	0,081	0,079	0,042
Institut8	0,315	0,315	0,129	0,069	0,064	0,057
Institut9	0,311	0,313	0,135	0,085	0,062	0,045
Institut10	0,306	0,314	0,139	0,76	0,072	0,055

Werden die Wahlsieger und die im Landtag vertretenen Parteien korrekt prognostiziert?

In welchen Fällen käme es zu einer deutlich veränderten Zusammensetzung des Landtags?

Aktuell regiert eine schwarz-gelbe Koalition NRW. Untersuchen Sie, ob dies nach den obigen Prognosen in allen Fällen möglich wäre.

Welches Institut liefert die beste/schlechteste Prognose? Begründen Sie Ihre Einschätzung.

- c) Beurteilen Sie ausgehend von der Analyse der Simulation, ob ein Wahlergebnis korrekt angegeben werden kann, wenn 1000 Wahlberechtigte vorab befragt werden.

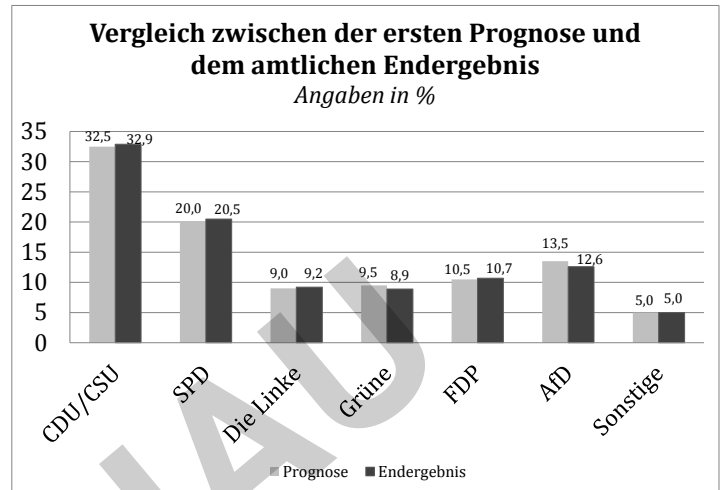


Warum ist das Ergebnis am Wahlabend so gut? – Das Konfidenzintervall

M 6

Aufgabe

- a) Im nebenstehenden Diagramm sind sowohl die Ergebnisse der ersten Prognose des Meinungsforschungsinstituts Infratest dimap als auch die amtlichen Endergebnisse dargestellt. Vergleichen Sie die Ergebnisse.
- b) Infratest dimap wirbt in Pressemitteilungen mit der Güte der Umfrageergebnisse: „Infratest dimap Prognosen treffen ins Schwarze. [...] Das Superwahljahr 2009 geht für Infratest mit einer eindrucksvollen Leistungsbilanz zu Ende. In allen drei Prognosen, die Infratest dimap im Auftrage der ARD [...] erstellt hat, wurden die vorläufigen Endergebnisse bereits um Punkt 18 Uhr hervorragend getroffen.“



(INFRAEST-DIMAP.DE, Pressemitteilung vom 12.03.2010)

Nach der Analyse der Umfrageergebnissen bei Sonntagsfragen ergibt sich die Frage, warum das Meinungsforschungsinstitut so gut abschneidet. Wir untersuchen, wie sich das Konfidenzintervall ändert, wenn der Stimmenanteil einer Partei h und der Stichprobenumfang variieren. Berechnen Sie in arbeitsteiliger Gruppenarbeit (Gruppe 1: $h_1 = 0,1$; Gruppe 2: $h_2 = 0,2$; Gruppe 3: $h_3 = 0,3$; Gruppe 4: $h_4 = 0,4$; Gruppe 5: $h_5 = 0,5$) die fehlenden Werte der Tabelle. Gehen Sie hierbei so vor wie zuvor in M 5 gezeigt.

Stichprobenumfang (Anzahl der Befragten)	Anzahl der Stimmen für die Partei	Untere Grenze des Konfidenzintervalls	Obere Grenze des Konfidenzintervalls	Breite des Konfidenzintervalls
1000	100 ($h_1 = 0,1$)			
4000	400 ($h_1 = 0,1$)			
16.000				
64.000				
100.000				

- c) Stellen Sie die Ergebnisse vor und analysieren Sie die Tabellen. Wie verändert sich die Breite des Konfidenzintervalls mit der Zunahme des Stichprobenumfangs? Formulieren Sie anhand Ihrer Beobachtungen eine Regel.
- d) Erklären Sie anknüpfend an Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil c), warum die Ergebnisse am Wahlabend so gut sind.

© RAABE 2019



Paradoxien bei Wahlverfahren

M 7B

„Simpson’s Party“ verbessert ihr Ergebnis in allen Wahlkreisen



Im Gegensatz zum Mehrheitswahlrecht ist beim Verhältniswahlrecht der Anteil aller abgegebenen Stimmen, den eine Partei erhält, für die Sitzverteilung im Parlament entscheidend.

In „Demoskopien“ wird in zwei Wahlkreisen gewählt. Die Partei „Simpson’s Party“ (S) legt von der einen Wahl zur nächsten in allen Wahlkreisen zu. Sie steigert ihren prozentualen Stimmenanteil in allen Wahlkreisen. Aufgrund der rasanten gesellschaftlichen Umbrüche ändert sich zwischen den Wahlen die Größe der beiden Wahlkreise.

Aufgabe

- a) Die „Demoskopien Post“ folgert aus den Wahlergebnissen: *„Die ‚Simpson’s Party‘ legt in allen Wahlkreisen zu und steigert somit ihr Gesamtergebnis im Vergleich zur letzten Wahl.“* Prüfen Sie, ob die Aussage richtig ist, indem Sie die folgende Tabelle ergänzen.

	Wahlkreis 1	Wahlkreis 2	Gesamt
1. Wahl: Stimmenanzahl	800	400	
Anzahl der Stimmen für „S“	480	120	
Anteil der Stimmen für „S“			
2. Wahl: Stimmenanzahl	800	1600	
Anzahl der Stimmen für „S“	520	560	
Anteil der Stimmen für „S“			

- b) Lösen Sie diese Paradoxie auf, indem Sie selbst einen Extremfall konstruieren. Ergänzen Sie dazu die untenstehende Tabelle.

1. Wahl: Stimmenanzahl			
Anzahl der Stimmen für „S“			
Anteil der Stimmen für „S“			
2. Wahl: Stimmenanzahl			
Anzahl der Stimmen für „S“			
Anteil der Stimmen für „S“			

© RAABE 2019



Lösungen

M 1 Manipulative Statistiken entlarven

- a) Die Schüler beschreiben die unterschiedlichen Eindrücke, die bei der Betrachtung der vier Diagramme entstehen.
- Zwischen 1949 und 2017 schwankt die Wahlbeteiligung zwischen weniger als 80 % und über 90 %. Das Maximum liegt im Jahr 1972. Zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums liegt die Wahlbeteiligung unter 80 %.
 - Zwischen 1972 und 2009 sinkt die Wahlbeteiligung rapide.
 - Zwischen 1972 und 2013 ist der Trend einer sinkenden Wahlbeteiligung zu erkennen. Die Wahlbeteiligung sank in diesem Zeitraum von mehr als 90 % auf weniger als 75 %.
 - Die Wahlbeteiligung unterliegt zwischen den Jahren 2005 und 2017 einer großen Schwankung. Nachdem diese von knapp 78 % um ca. 7 Prozentpunkte gefallen ist, stieg sie im Jahr 2017 wieder auf ca. 76 % an.
- b) Eindrücke:
- Die Auswahl der Daten (Zeitspanne, Weglassen von Daten) bestimmt den Eindruck, der entsteht.
 - Darüber hinaus spielt die Darstellung eine Rolle (z. B. Verkürzung der y-Achse).
 - **Schlagzeilen:** „Seit 1983 sind die Grünen im Aufwärtstrend“ und „Seit 30 Jahren stimmen rund 8 % für die Grünen“
 - **Checkliste:**
 - Verkürzung/Streckung der y-Achse: Durch das Abschneiden der y-Achse und deren Streckung entsteht der Eindruck einer großen Veränderung.
 - Wahl des Basisjahres: Eine Änderung wirkt besonders drastisch, wenn man als Basisjahr das Maximum oder das Minimum auswählt.
 - Datenauswahl: Damit Trends nicht unterbrochen werden, werden Daten weggelassen (z. B. werden nur die Wahlergebnisse jeder zweiten Wahl herangezogen).
 - Herausgeber/Interessen: Prüfen Sie auch, wer die Daten erhebt und herausgibt und welche Interessen von dem Herausgeber verfolgt werden.

M 2 Daten mithilfe von Baumdiagrammen strukturieren

- a) Da die Pfade, die zu demselben Ereignis gehören, die gleichen Wahrscheinlichkeiten haben, beruhen die Artikel auf den gleichen Daten. Da die verwendeten Daten gerundet sind, kommt es zu geringen Abweichungen.

A: Abitur oder Fachhochschulreife
 \bar{A} : kein höherer Bildungsabschluss
 AfD: AfD-Wähler
 $\overline{\text{AfD}}$: anderer Wähler

