Kapitel 3 Die Ableitungen einer Funktion und ihre Bedeutung, Ableitungsregeln

Kapitel 4 Kurvendiskussion, Anwendung der Differentialrechnung

Vorwort

Die MINT-Fachbereiche (**M**athematik, **I**nformatik, **N**aturwissenschaft, **T**echnik) der Universitäten und Fachhochschulen zeichnen leider derzeit ein wenig erfreuliches Bild: Ein erheblicher Prozentsatz der Abiturienten scheitert trotz grundsätzlicher Begabung in den ersten Semestern und muss für ein erfolgreiches Studium in allen Kompetenzen und auf allen Anforderungsebenen (auf eigene Kosten) nachgeschult werden. Grund ist mangelnde Flexibilität in der Anwendung grundlegender Kenntnisse und Fähigkeiten sowie erhebliche Defizite und zu wenig Sicherheit in diesen Bereichen.

Das Arbeitsheft bietet daher eine knappe Darstellung der nötigen Kenntnisse und Fähigkeiten und neben erklärenden Beispielen insbesondere offene, praxisnahe Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades mit Lösungen, die genau diese Flexibilität und das nötige Wissen einfordern und trainieren. Das Material ist gleichermaßen in Vertretungsstunden, für etwas ungewöhnliche Hausaufgaben oder auflockernde Gruppenarbeit einsetzbar, dient langfristig als Flexibilitätstraining im Hinblick auf das Abitur und eine naturwissenschaftliche Ausbildung, und es eignet sich sogar für den Erwerb der einschlägigen Kenntnisse und Fähigkeiten im Eigenstudium.

Es geht bei den Aufgaben daher weniger um Ergebnisse, sondern um das Auffinden eines realisierbaren Lösungsweges im Sinne des Mottos „Der Weg ist das Ziel“, mit all den Problemen und Ungenauigkeiten, die nicht stilisierte, praxisnahe Aufgaben mit sich bringen. Es gibt also nicht DIE Lösung, und die „Musterlösungen“ sind nur Vorschläge. Angestrebt wird eine möglichst große Methodenvielfalt.

Das Heft orientiert sich an den bundesweit in Mathematik verbindlichen Kompetenzen:

K1: Mathematisch argumentieren,
K2: Probleme mathematisch lösen,
K3: Mathematisch modellieren,
K4: Mathematische Darstellungen verwenden,
K5: Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik,
K6: Kommunikation.

Das Anforderungsniveau der Kompetenzen kann unterschiedlich hoch sein. Eine brauchbare Einteilung im Lehreralltag liefern die Begriffe Reproduktion (leicht, eingeübt), Reorganisation (mittleres Niveau) und Transfer (hohes Niveau). Genauer:

Reproduktion:	passives Abfragen gelernter, trainierter Inhalte	☼
Reorganisation:	Anwenden gelernter Inhalte und Fähigkeiten	☼☼
Transfer:	eigenständige Suche nach Lösungsmöglichkeiten	☼☼☼

Dies ist kein ausführliches Lehrbuch zur Erarbeitung der Inhalte. Das nötige Wissen wird vielmehr zusammenfassend präsentiert. Der mathematische Hintergrund wird aber nur angedeutet und theoretische Sachverhalte werden vereinfacht dargestellt.

F. Steinleitner, August 2018

Anwendungshinweise

Wichtig: Das bundesweite Grundwissen der Unter- und Mittelstufe wird vorausgesetzt, ebenso grundlegende Kenntnisse einer Tabellenkalkulation wie z. B. Excel® und Erfahrung im Einsatz einfacher Freeware-Funktionsplotter wie TurboPlot® oder GeoGebra®.

Um die nötige Übersichtlichkeit zu gewährleisten, wurde ein klar strukturiertes Layout gewählt. Zudem werden die Schüler hier mit „Sie“ angesprochen.

Das Arbeitsheft verwendet neben der Einteilung in **Kapitel 1, 2, 3, 4**

Untergeordnete Themen

und folgende mit Graustufen markierte Orientierungshilfen, Strukturen und Hinweise:

Beispiele, Lösungsmuster [...]

Aufgabe A1 oder Problem P1: Thema ☼, ☼☼, ☼☼☼ K1, K2, …

Lösung A1, A2, A3… oder P1, P2, P3

Wichtig: gut einprägen bzw. unverzichtbares, aktuell eingesetztes Grundwissen

Hinweis

Symbolbeschreibung

:=	bedeutet eine Definition
TR	bedeutet Einsatz des Taschenrechners
m [kg]	bedeutet Masse in Kilogramm, andere Größen analog
☼	symbolisiert eine Aufgabe mit leichtem Schwierigkeitsgrad
☼☼	symbolisiert eine Aufgabe mit mittlerem Schwierigkeitsgrad
☼☼☼	symbolisiert eine Aufgabe mit hohem Schwierigkeitsgrad
	bittet um eigenständige Internetrecherche
(…)	Hinweis, Anleitung

Die Einführungen, Aufgaben und Lösungen sind inhaltlich auf je eine Seite eingepasst und können so ohne Zuschneiden als Kopiervorlage dienen.

Elementare Funktionen, was ist eine Funktion?

Sie wissen sicher, dass eine Funktion eine eindeutige Zuordnung zwischen zwei Größen (oder reinen Zahlen) ist: **unabhängige Variable x → abhängiger Wert y**
symbolisch **y = f(x)**

Diese „Funktion", auch Abhängigkeit genannt und meist mit f symbolisiert, lässt sich im Idealfall mit einem **Term** f(x) angeben, punktuell mit einer Tabelle, ungenau, aber gut interpretierbar mit einem Graphen in einem (euklidischen) Koordinatensystem. Die unabhängige Variable x variiert dabei in einem (maximalen) **Definitionsbereich D_f**, die Werte y liegen dann im **Wertebereich W_f.**

Vorweg: Auf Dauer ist es ungeschickt, wenn generell die Variable x und die Werte y genannt werden. Man sollte die Bezeichnungen der Situation angepasst wählen und ständig variieren. Verbindlich ist, die Variable als **Rechtswert**, den Wert als **Hochwert** darzustellen.

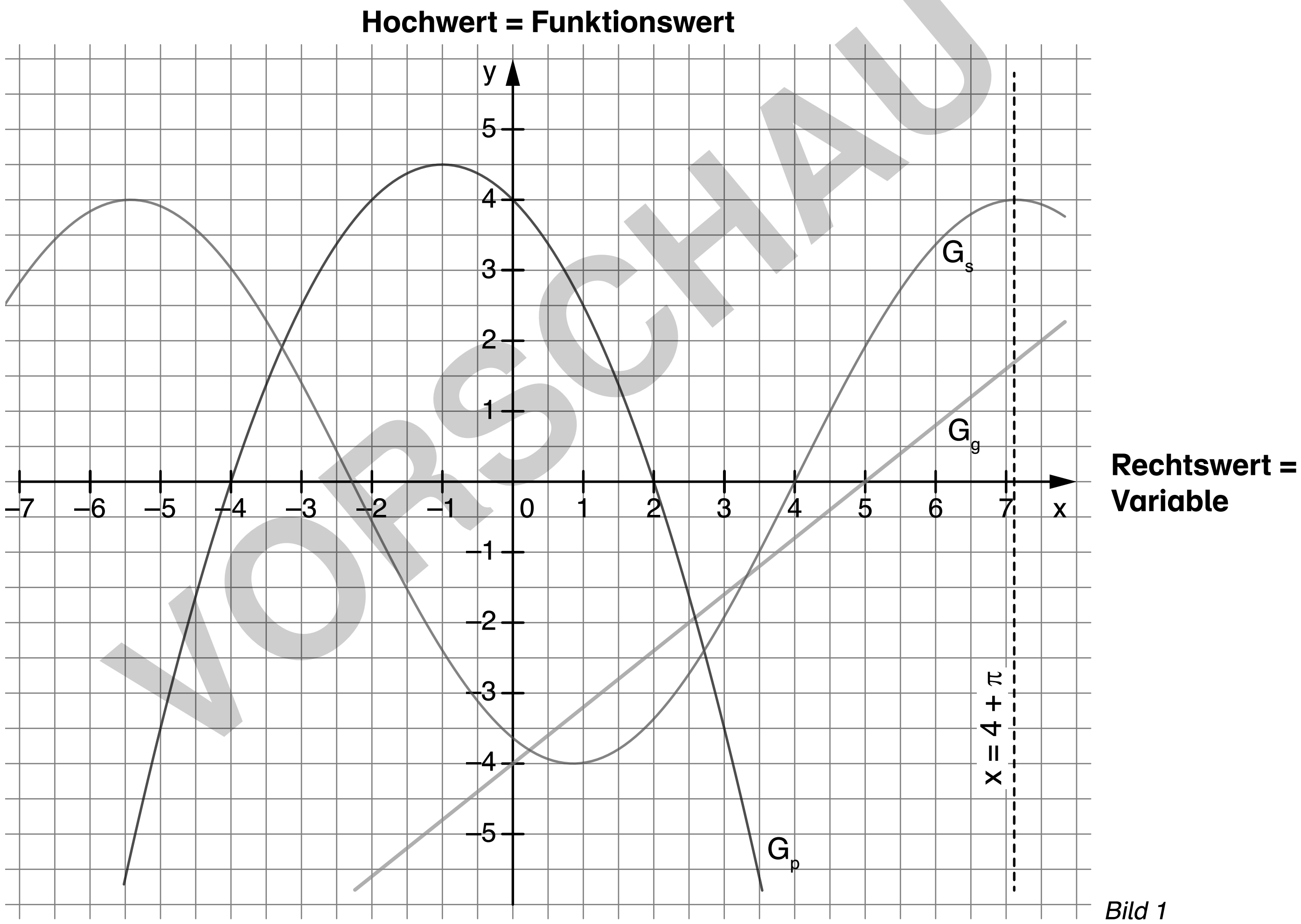

Bild 1

Die grundlegenden (parametrisierten) Funktionsterme grundlegender Funktionen der Mittelstufe sollten bekannt sein: Potenzfunktionen 1., 2. und 3. Grades, Hyperbel- und Winkelfunktionen. (Bei Bedarf bitte wiederholen.)
Ein kleiner anspruchsvoller Test: Entnehmen Sie den Graphen durch reines Nachdenken und etwas Kopfrechnen die Funktionsterme g(x), p(x), s(x) und überprüfen Sie dies anschließend:

Gerade (☼):	$y = g(x) = 0{,}8 \cdot x - 4 = 0{,}8 \cdot (x - 5)$
Parabel (☼☼):	$y = p(x) = -0{,}5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 4) = -0{,}5 \cdot (x + 1)^2 + 4{,}5$
Sinuskurve (☼☼☼):	$y = s(x) = 4 \cdot \sin(0{,}5 \cdot (x - 4)) = 4$

Beispiel einer praxisgerechten Funktion: Tonumfang einer Geige

Als Beispiel eine ungewöhnliche, anspruchsvolle, aber praxisnahe Funktion:

Bild 2: Ton c' auf der tiefen g-Saite einer Geige

Geigenspiel

Funktion: mit dem Bogen streichen

Unabhängige Variable: s
Wo genau drückt der Finger die Saite?

Abhängige Variable: f
Welcher Ton erklingt (Frequenz f)?

Der Ton wird bestimmt durch die Spannung und Länge der Saite. Das Halbieren der frei schwingenden Länge bewirkt eine Oktave, also doppelte Schwingfrequenz. Bei einer perfekt gestimmten Geige erklingt der Grundton der 32 cm langen tiefen Saite g mit der Frequenz f_0 = 195,998 Hertz. Auf jeder Saite kann man zwei Oktaven spielen.

Überlegen Sie sich, warum das Griffbrett dann mindestens 24 cm lang sein muss.
Griffbrettlänge = 0,5 · 32 cm *(1. Oktave)* + 0,5 · 0,5 · 32 cm *(2. Oktave)* = 24 cm

Die Oktave wird im Allgemeinen in 12 Halbtonschritte eingeteilt. Spielen wir die 12 Halbtöne der 1. Oktave der chromatischen Tonleiter auf der g-Saite:

g –^{1} gis –^{2} a –^{3} ais –^{4} h –^{5} c′ –^{6} cis –^{7} d′ –^{8} dis′ –^{9} e′ –^{10} f′ –^{11} fis′ –^{12} g′

Sie müssen das nicht gleich verstehen: Die Frequenz der Halbtöne wächst exponentiell mit Faktor $\sqrt[12]{2}$, sodass nach 12 Halbtönen die Oktave auftritt: $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$.

Nehmen wir als **unabhängige Variable** die frei schwingende Länge s der Saite und als **abhängige Variable** die Frequenz f des Tons, dann haben wir als **Definitionsbereich D** = [8 cm; 32 cm] – 8 cm wegen 1. Oktave – und als **Wertebereich W** = [g; g″] oder besser **W** = [195,998 Hz; 783,991 Hz] (bitte nachrechnen).

Wir können sogar *(mit etwas Überlegen)* den **Funktionsterm** angeben:

$f(s) = 32\,\text{cm} \cdot \dfrac{195{,}998\,\text{Hz}}{s}$ mit einer einfachen Hyperbel als Graph, siehe Bild 3.

Wählen wir als **unabhängige Variable** die Halbtonnummer beginnend mit
g: x = 0 → gis: x = 1 → a: x = 2 → ais: x = 3 → h: x = 4 → c: x = 5 → … → g‴: x = 24
und als **abhängige Variable** wieder die Frequenz f des Tons, dann haben wir als **Definitionsbereich D** = [0; 1; 2; …; 24] und als **Wertebereich** wieder **W** = [g; g″] oder eben **W** = [195,998 Hz; 783,991 Hz].

Diesmal wäre der Funktionsterm $f(x) = 195{,}998\,\text{Hz} \cdot 2^{\frac{x}{12}}$ mit einer Exponentialkurve als Graph, siehe Bild 4.

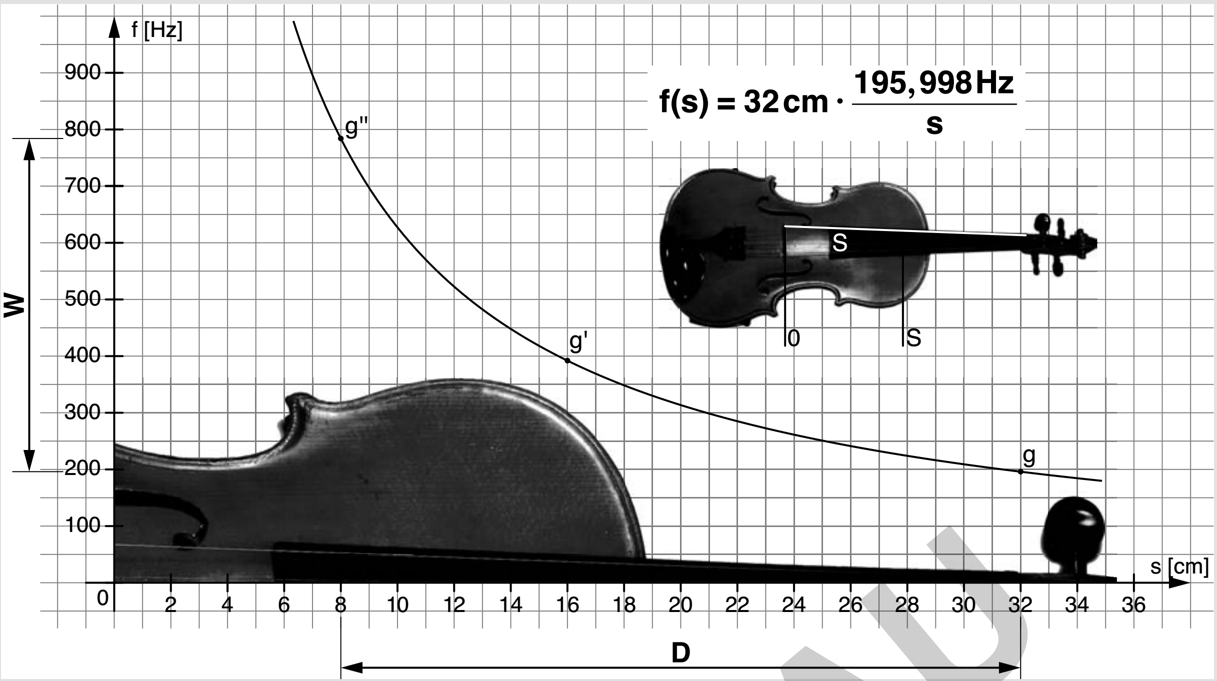

Bild 3: Der Graph ist eine ***Hyperbel*** *(1. Ordnung wegen s_1) mit Definitionsbereich* ***D*** *= [8 cm; 32 cm] und Wertebereich* ***W*** *= [195,998 Hz; 783,991 Hz].*

$$f(x) = 195{,}998\,Hz \cdot 2^{\frac{x}{12}}$$

mit g: x = 0 ; gis: x = 1 ; a: x = 2 ; ais: x = 3 ; h: x = 4 ; c: x = 5 ; … g''': x = 24.
Vorsicht: x ist die Nummer des Tons, keine Länge in cm.

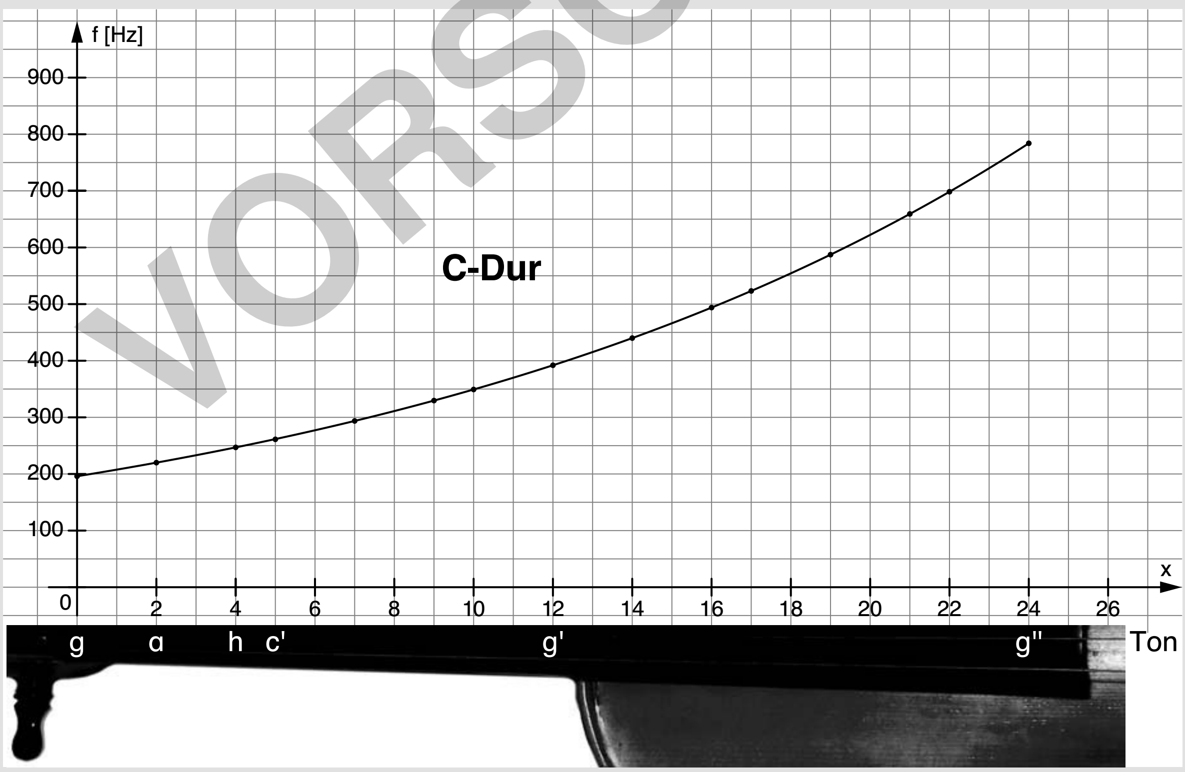

Bild 4: Graph einer ***Exponentialfunktion*** *mit Definitionsbereich* ***D*** *= [0; 1; 2; … ; 24] und Wertebereich* ***W*** *= [g; a; h; … ; g''].*

Beachten Sie: Der Wertebereich besteht aus den Frequenzen der fett markierten Punkte und der Definitionsbereich aus den Zahlen 0, 1, 2, … , 24.

Die Steigung einer Kurve am Beispiel der Geschwindigkeit

Das Problem der Steigung einer Kurve bzw. des entsprechenden mathematischen Operators *Differential* erfasst man am einfachsten anhand des Problems „Momentangeschwindigkeit“.

Es empfiehlt sich vorweg eine Wiederholung der verschiedenen Arten der Steigungsangabe und der dazu nötigen Winkelfunktionen Sinus, Kosinus, Tangens.

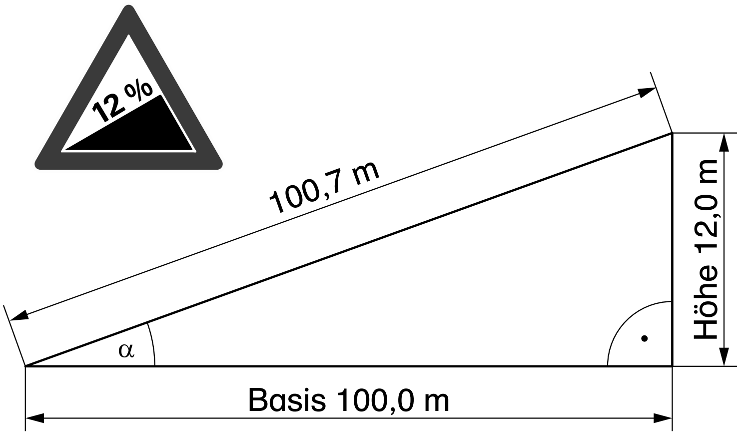

Bild 38

Etwas unerwartet ist die Steigung in Prozent als Quotient $\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Basislänge}}$ definiert, nicht als Quotient $\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Hanglänge}}$.

Die Steigung einer Geraden gegen die Horizontale ist der Tangens des zugehörigen Winkels: $\tan(\alpha) = \frac{12\,\text{m}}{100\,\text{m}} = 0{,}12 = 12\,\%$.

Umgekehrt findet man den Winkel über α = Inv tan(12 %) = Inv tan(0,12) $\approx$ 6,84°.

Die Hanglänge findet man über $\frac{12\,\text{m}}{\sin(6{,}84°)} = \frac{100\,\text{m}}{\cos(6{,}84°)} \approx 100{,}7$ m

oder mittels des Satzes von Pythagoras: $\sqrt{(100\,\text{m})^2 + (12\,\text{m})^2} \approx 100{,}7\,\text{m}$.

Geschwindigkeit = $\frac{\text{Wegstrecke}}{\text{Zeitspanne}}$ ist eine scheinbar triviale Größe – solange man konstant fährt, was praktisch völlig unmöglich ist.

„Konstant“ meint hier: Wegstrecke und Zeitspanne sind proportional zueinander.

„Proportional“ bedeutet: Der Quotient der proportionalen Größen ist konstant.

Am Rande: Umrechnung $\frac{\text{km}}{\text{h}} \Leftrightarrow \frac{\text{m}}{\text{s}}$ mit Faktor 3,6:

$54\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = (54 : 3{,}6)\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\frac{100\text{ m}}{9\text{ s}} = \left(\frac{100}{9} \cdot 3{,}6\right)\frac{\text{km}}{\text{h}} = 40\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Formales: Schreiben wir kurz symbolisch:

- s für die Position (lat.: spatium);
- t für die Zeit (lat. tempus; engl. time);
- v für die Geschwindigkeit (lat. velocitas) und
- a für die Beschleunigung (lat. accelero; engl. acceleration).

Nach allgemeiner Vereinbarung für konstante Bewegung ist:

Geschwindigkeit := $\frac{\text{Positionsänderung } \Delta s}{\text{Zeitspanne } \Delta t}$,

Beschleunigung a := $\frac{\text{Geschwindigkeitsänderung } \Delta v}{\text{Zeitspanne } \Delta t}$.

Die Krafteinheit Newton N sollte bekannt sein:

10 N sind das Gewicht der Masse 1 kg und

Aufgabe A1: Harmonisches Kugelpendel ☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

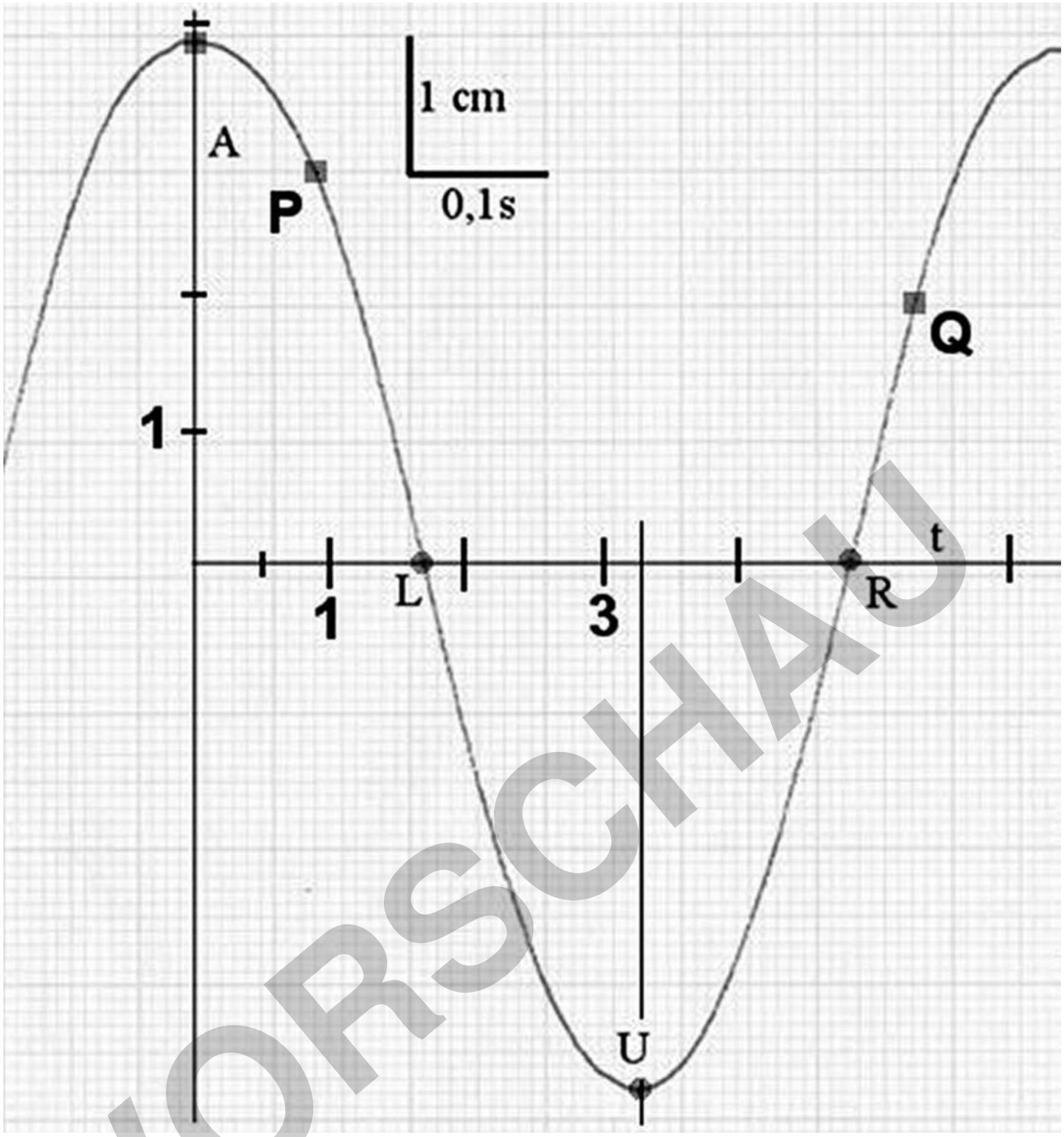

Bild 39

Die xy-Schreiber-Messkurve auf Millimeterpapier zeigt die Schwingung einer Stahlkugel an einer langen weichen Spiralfeder (Amplitude A, Zeit t). Der Augenschein spricht für eine sinusartige Kurve. Überprüfen Sie das, indem Sie anhand ausgewählter Punkte einen passenden Funktionsterm entwickeln.

Aufgabe A2: Kugelpendel (Fortsetzung) ☼, ☼☼, ☼☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

a) Den durch die fetten runden Punkte markierten Abschnitt in obiger Messkurve könnte man auch als Parabelabschnitt interpretieren. Geben Sie den Funktionsterm an.

b) Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung des theoretischen und realen Werts 0,05 Sekunden nach Messpunkt L.

c) Zeichnen Sie im Punkt R die Tangente ein, messen Sie ihre Steigung und überlegen Sie sich die Bedeutung dieses Werts.

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung der Kugel im Verlauf der ersten Viertelschwingung.

Aufgabe A3: Straßensteigungen ☼ K3, K5

Die bekannte Lombard Street in San Francisco ist mit acht 90°-Zick-Zack-Kurven auf 145 m Gesamtlänge die kurvenreichste und mit 27 % Steigung auch eine der steilsten Straßen der Welt.

Berechnen Sie den zu überwindenden Höhenunterschied zwischen Beginn und Ende und den Anstiegswinkel.

Aufgabe A4: Geschwindigkeit und Weg im Diagramm ☼☼ K3, K5

Stellen Sie von Hand ein konstant $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahrendes Auto in einem sinnvollen s(t)-Diagramm mit sinnvollen Maßeinheiten für $1\frac{1}{3}$ Stunden Fahrzeit dar, das um 09:20 Uhr ab Passau (Donaukilometer 2 222) an der Donau entlang abwärtsfährt. Entnehmen Sie dem Diagramm, wann der Wagen die Kilometermarke 2 282 passiert. Wo ungefähr sind Sie dann (auf der Landkarte) nach 100 km Fahrt?

Aufgabe A5: Luftwiderstand beim Autofahren ☼☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Die Tabelle beschreibt den Gesamtwiderstand in der Einheit Newton (N), den ein schnelles Auto bei ansteigender Geschwindigkeit überwinden muss.

Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$	Gesamtwiderstand in N	Benötigte Leistung in PS
50	355	7
100	579	22
150	952	54
200	1 474	111
250	2 146	202
300	2 968	336
350	3 938	520
400	5 058	764

Bild 40: Datenquelle: http://www.e31.net/luftwiderstand.html vom 21.08.2018

a) Zeigen Sie, dass der Widerstand weder proportional noch linear ansteigt, und überlegen bzw. berechnen Sie:

b) Welche Leistung läge bei linearem Anstieg bei $250\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ vor?

c) Welches Anstiegsverhalten könnte angenähert vorliegen?

Einstieg in die Differentialrechnung: das „unendlich Kleine“

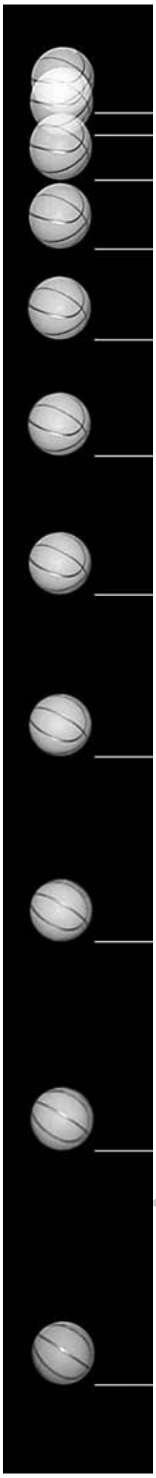

Bild 41

Das Problem der Infinitesimalrechnung stellt sich z. B. über die Frage:
Wie lange hat eine frei fallende Kugel, die naturgemäß aufgrund des Gewichts gleichmäßig beschleunigt, ein ganz bestimmtes Tempo?
Mathematisch konsequent nur für die Zeitspanne NULL.

Eine mögliche Auswertung dieses Bildes liefert dieses Diagramm:

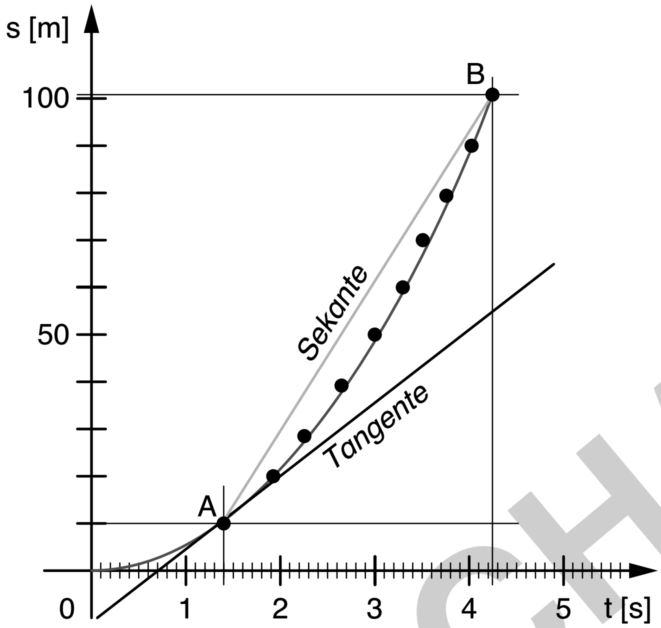

Bild 42

Die Durchschnittsgeschwindigkeit $v_{A \to B} = \dfrac{s_A - s_B}{t_A - t_B}$

ist geometrisch die Steigung der Sekante [AB].

Es ist zwar nicht trivial, aber naheliegend, die „**momentane Geschwindigkeit**“ zum Zeitpunkt t_A als Steigung einer Tangente an die Kurve zum Zeitpunkt t_A zu interpretieren.

Der Ball hat die Geschwindigkeit nur für eine unendlich kurze Zeitspanne.

Mathematiker verwenden das neulateinische Wort ***infinitesimal*** (unendlich klein).

Die reale Bewegung des Balls setzt sich gewissermaßen aus unendlich vielen unendlich kurzen Zeitspannen mit je ganz bestimmter Geschwindigkeit zusammen.

Das Unendliche und das unendlich Kleine sind keine Zahlen; es sind Annäherungen ohne Grenze, der Mathematiker nennt sie „Grenzübergänge“. Insbesondere ist das „unendlich Kleine“ nicht NULL. Man kann also mit dem Unendlichen und dem Infinitesimalen nicht rechnen wie mit „normalen“ Zahlen.

Die Bedeutung der 1., 2. und 3. Ableitung für den Kurvenverlauf

Prüfen Sie die Ableitungen am markierten Punkt auf Vorzeichen und Nullstellen.

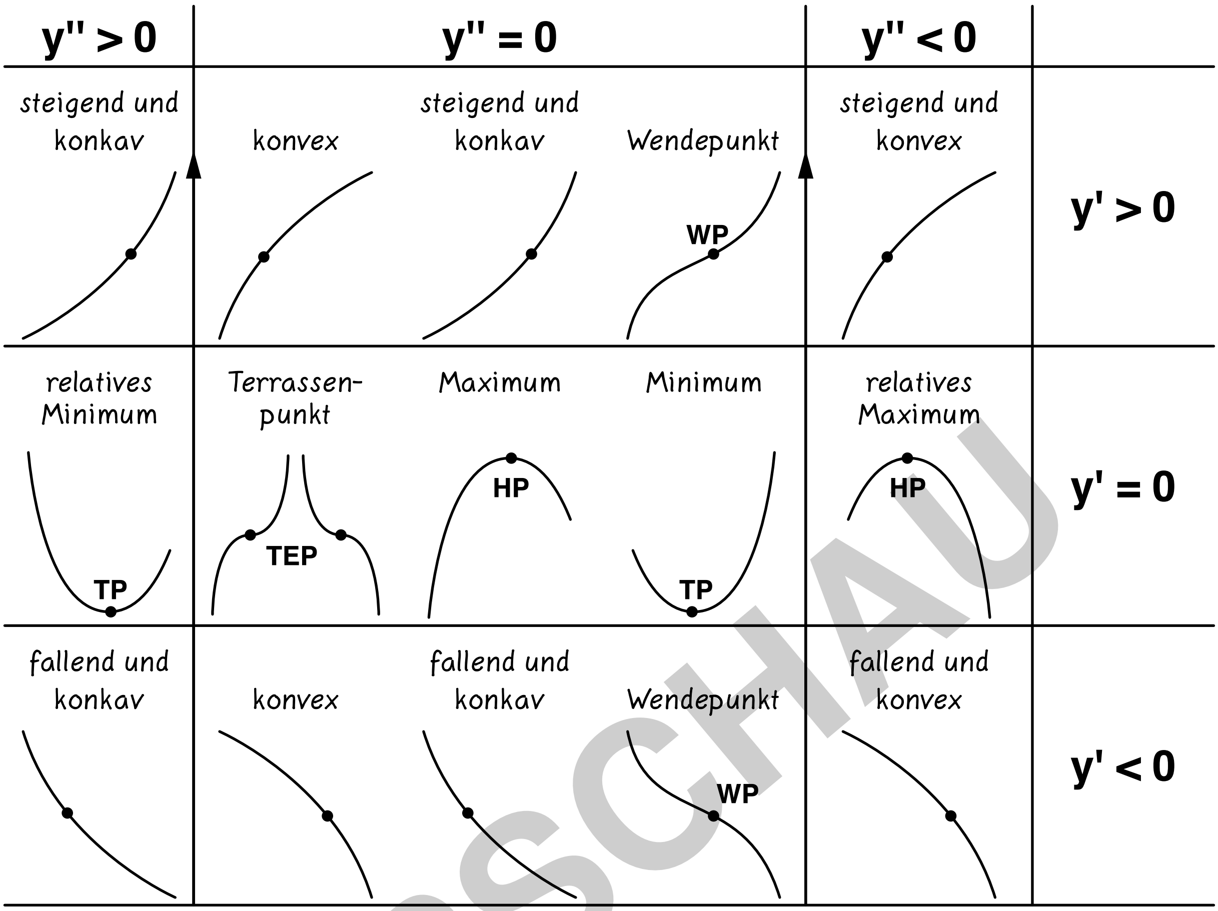

Bild 81

Die formale Bedeutung der 3. Ableitung für den Kurvenverlauf

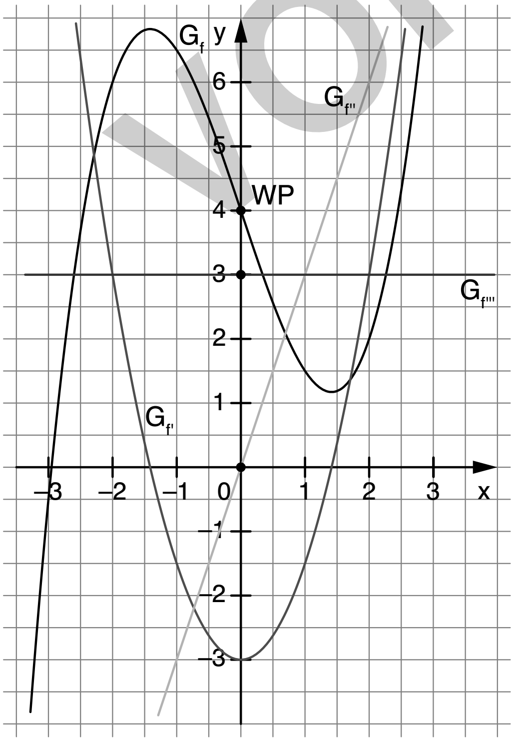

Bild 82

Die 3. Ableitung gibt die Steigungen der 2. an …

Wenn an einer Stelle $y''' \neq 0$ ist, steigt oder fällt der Graph der 2. Ableitung streng monoton.

Wenn dann $y'' = 0$ ist, wechselt y'' das Vorzeichen.

Damit liegt an dieser Stelle ein Wendepunkt vor.

Ist zudem noch $y' = 0$, ist dies ein Terrassenpunkt.

Merken Sie sich: $\mathbf{y''' \neq 0}$ **und** $\mathbf{y'' = 0 \Rightarrow}$ **WP**

Vorsicht: Der Schluss ist NICHT umkehrbar, Beispiel: Der Graph einer anderen Funktion $g(x) = x^3$ hat bei $x = 0$ offenbar einen Terrassenpunkt, es ist $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 0$, aber $g'''(0) = 0$.

Aufgabe A10: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

$f(x) = -0{,}25 \cdot (x + 2) \cdot (x - 6)$

Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Tangenten an die Kurve der Funktion f in den Nullstellen schneiden, und geben Sie den Term dieser Tangenten an.

Aufgabe A11: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼, ☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Zeigen Sie:

a) Alle Kurven der Funktionenschar $f(x) = \frac{x^2}{k} - x$ haben eine gemeinsame Tangente und schneiden die x-Achse unter demselben Winkel.

b) $w(x) = \sin(x)$ und $p(x) = x - \frac{x^3}{6}$ haben eine gemeinsame Wendetangente.

c) Die Wendepunkte der Kurve $y = 0{,}15x^5 - 2x^3 + 5x$ liegen auf einer Geraden.

Aufgabe A12: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

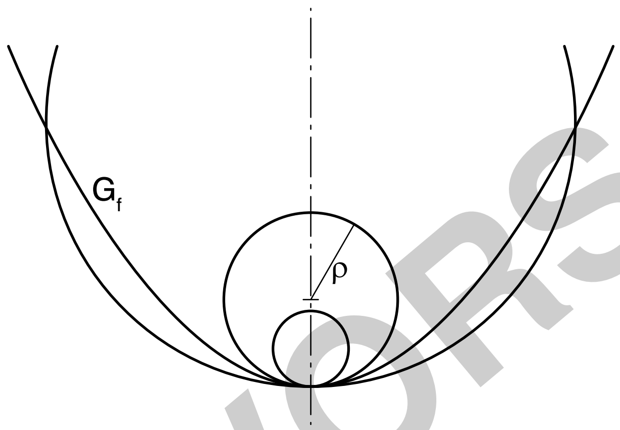

Bild 83

Die Stärke der Krümmung wird mit einer ziemlich komplex konstruierten Maßzahl κ beschrieben: Man benutzt, salopp formuliert, den Radius ρ des Kreises, der sich im fraglichen Punkt optimal an eine Kurve y anschmiegt:

$\rho = \left|\frac{1}{\kappa}\right|$

Die Theorie liefert $\kappa = \frac{y''}{\sqrt{\left(1 + (y')^2\right)^3}}$

Berechnen Sie den Krümmungsradius für die Extrema einer Sinuskurve und überprüfen Sie dies mit einem Kurvenplotter.

Tipp: Ein Kreis K(x) mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius r hat den Term: $K(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Verschieben Sie den Graphen passend.

Aufgabe A13: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Berechnen Sie mit Nachweis den ersten Wendepunkt der Stammfunktion F der Funktion $f(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$ im Bereich der positiven x-Achse, wobei P(0|1) auf G_F liegen soll. Berechnen Sie auch die Wendetangente und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Plotters.

Aufgabe A14: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Betrachten Sie die Kurven $p(x) = -ax^2 + 3$ für $x < 1$ und $h(x) = \frac{b}{x}$ für $x \geq 1$.

Wählen Sie die Parameter a und b so, dass der Graph nahtlos und ohne Änderung der Steigungsänderung durchläuft. Zeigen Sie: Der Nahtpunkt ist ein Wendepunkt.

Aufgabe A15: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Wenn man den Parameter im Term $f(x) = \frac{x}{k} + \frac{k}{x}$ variiert, bilden die Hoch- bzw. Tiefpunkte jeweils eine nahtlose Ortslinie. Beschreiben Sie diese Linien als Funktion.

Aufgabe A16: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

Ermitteln Sie die Kurve der Extrema der Funktionenschar $y = (1 - a) \cdot x^2 + a \cdot x$.

Aufgabe A17: Steigung, HP, TP, TEP, Krümmung ☼☼☼ K1, K2, K3, K4, K5, K6

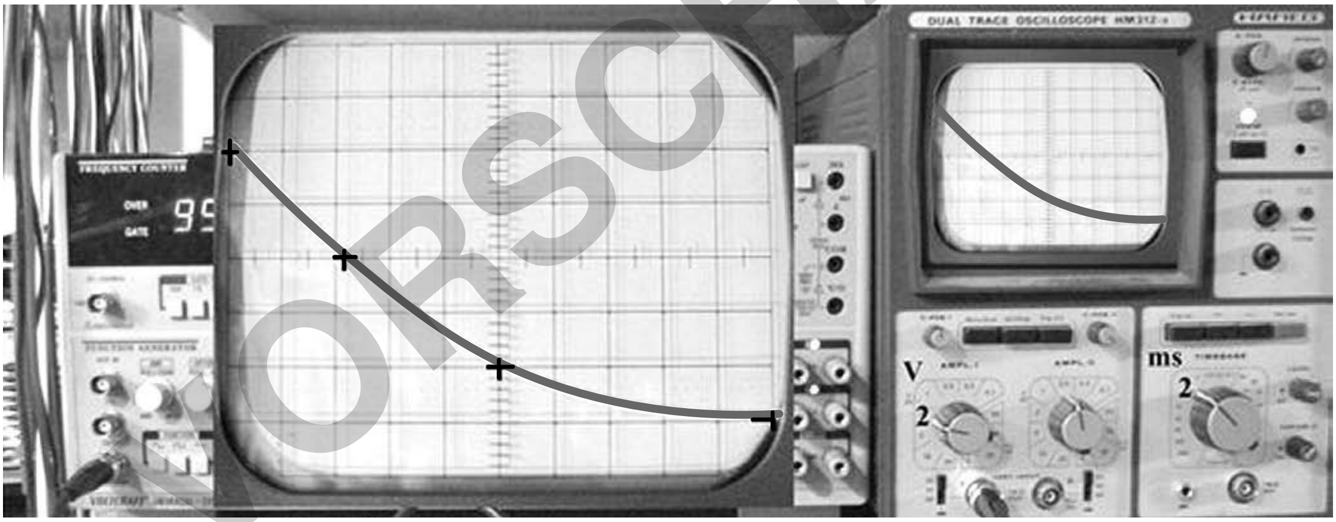

Bild 84

Ich hatte mal im Rahmen eines Physikexperimentes mit einer recht komplexen Schaltung ein Signal auf dem Oszillographen, dessen Entstehung und Art mir unklar war: Sinus- oder Exponential- oder Parabelkurve?

Zum Test benutzte ich neben „schönen" Punktkoordinaten wie (0|–2) u. a. die offenkundige Steigung –1 am Punkt (–4|1). Für welche Kurve entscheiden Sie sich und warum?

Übrigens: Der schöneren Zahlen wegen legte ich dabei die Kurve für die Berechnungen um 0,2 Einheiten tiefer. Ihnen ist sicher bekannt, dass Oszillographen den zeitlichen Verlauf einer Spannung U(t) messen.

Ermitteln Sie den Term Ihres Favoriten in absoluten Koordinaten, also mit Benennung.

Schließlich $(3x - 2) : (3x - 2) = \mathbf{+1}$

Also ist $(6x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 11x - 2) : (3x - 2) = \mathbf{2x^3 - 4x + 1}$

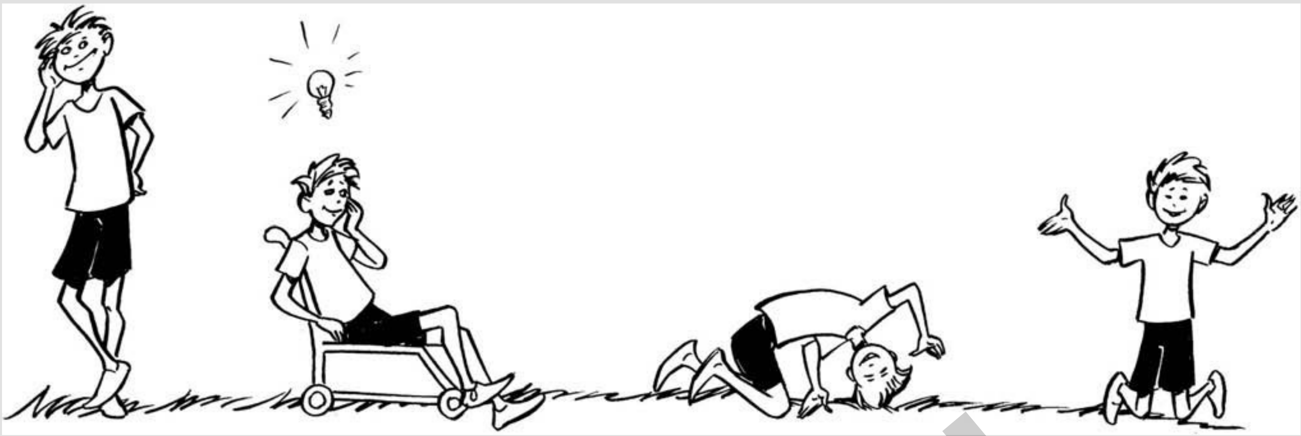

Bild 85

Sie sehen, alles nur eine Sache der Übung, Konzentration und Ausdauer.

Zum Training geeignete formale Aufgaben mit expliziten Lösungen bietet das Internet () zuhauf, weshalb ich hier auf eine Aufgabenreihe verzichte. Erfahrungsgemäß entwickelt jeder wie schon bei der Zahlendivision seine ganz eigene Methode:

Division der höchsten Potenzen → Rückmultiplikation → weiter mit Restpolynom