Vorwort

Im Mathematikunterricht wird häufig ein Lösungsbeispiel erarbeitet oder besprochen und dann folgen Übungsaufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden. In einer ganzen Reihe von Publikationen (z. B. *mathematik lehren Nr. 109/2001*) wird darauf hingewiesen, dass Schüler[1] Aufgaben in einem neuen Gebiet erfolgreicher bearbeiten, wenn sie die Gelegenheit bekommen, sich zunächst mit **mehreren Lösungsbeispielen** auseinanderzusetzen. Bei diesem Vorgehen sind die Lernenden zunächst von komplexen Problemlöseaktivitäten entlastet und haben damit kognitive Ressourcen zur Verfügung, um die neuen Vorgehensweisen besser zu verstehen. Für den Lernerfolg mit Lösungsbeispielen ist es wichtig, dass die Lernenden zusätzlich zu den Beispielen noch die Gelegenheit bekommen, sogenannte **„Selbsterklärungen“** zu erstellen. Beim Anfertigen dieser „Selbsterklärungen“ wird ein tieferes Verständnis für die Aufgaben aufgebaut.

Aus diesem Grund werden in dieser Unterrichtshilfe **zu jedem Thema zwei Arbeitsblätter** angeboten:

Auf dem ersten Arbeitsblatt mit dem Titel „So wird's gemacht!“, finden die Schüler die Lösungsbeispiele, wobei nur das erste Beispiel („1. So gehst du vor“) komplett ausgearbeitet ist. Die nächsten beiden Aufgaben („2. Mach es nach“, „3. Jetzt wird es schwieriger“) sind Teillösungen, die die Lernenden nach dem Muster des ersten Beispiels zu einer Lösung ergänzen müssen. Dabei erhöht sich sukzessive die Komplexität bis zur letzten Aufgabe („4. Jetzt kannst du es“).

Das zweite Arbeitsblatt mit dem Titel „Geh der Sache auf den Grund!“ leitet die Lernenden mit abwechslungsreichen Aufgabenstellungen dazu an, sich nochmals mit den einzelnen Schritten in den Beispielen auseinanderzusetzen und diese zu reflektieren. Dabei entstehen Selbsterklärungen, die zu einem tieferen Verständnis für die Vorgehensweise in den Beispielen führen sollen.

Die Lösungen finden sich am Ende des Heftes.

Viel Erfolg mit den Materialien wünscht Ihnen

Dr. Hardy Seifert

1 Aufgrund der besseren Lesbarkeit ist in diesem Buch mit Schüler auch immer Sc[illegible] Lehrer[illegible] etc.

1. So gehst du vor:

Bestimme die Lösungsmenge.

$y = 2x + 3$	Gleichung I
$y = 3x - 7$	Gleichung II

Gleichung I und II gleichsetzen.

$3x - 7 = 2x + 3$	$-2x$
$x - 7 = 3$	$+7$
$x = 10$	$x = 10$ in Gleichung I einsetzen
$y = 2 \cdot 10 + 3 = 23$	$L = \{(10 \mid 23)\}$

2. Mach es nach:

Bestimme die Lösungsmenge.

$y = x + 5$	Gleichung I
$y = 2{,}5x - 10$	Gleichung II

Gleichung I und II gleichsetzen.

$2{,}5x - 10 = x + 5$	$-x$
____________ = ____________	$+10$
$1{,}5x = 15$	$:1{,}5$
x = ____________	$x = 10$ in eine Gleichung (I oder II) einsetzen
y = ____________	$L = \{(10 \mid 15)\}$

3. Jetzt wird es schwieriger:

Bestimme die Lösungsmenge.

$2y = 2x - 4$	Gleichung I
$2y = 4x - 20$	Gleichung II

Gleichung I und II gleichsetzen.

$4x - 20 = 2x - 4$	$-2x$
____________ = ____________	____________
____________ = ____________	____________
x = ____________	____________
y = ____________	L = ____________

4. Jetzt kannst du es: (Arbeite im Heft.)

Bestimme die Lösungsmenge.

$4y = -7x - 1$	
$4y = -8x$	

Gleichsetzungsverfahren

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe

Ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen wurde mit dem Gleichsetzungsverfahren gelöst.
Beschreibe ausführlich die einzelnen Schritte.
Nutze dafür die folgenden Formulierungen:

Die Lösungsmenge wird angegeben.
x = 10 kann man nun in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen, um y zu berechnen.
Auf beiden Seiten werden 2x abgezogen.
Die rechte Seite von Gleichung I wurde mit der rechten Seite von Gleichung II gleichgesetzt.
Die neue Gleichung enthält nur noch x als eine Unbekannte.
Durch weiteres Umformen erhält man den x-Wert.
Auf beiden Seiten werden 7 addiert.
Der x-Wert (x = 10) wurde in Gleichung I eingesetzt.
Der y-Wert ist 23.

Schritt 1			
I	$y = 2x + 3$		Beide Gleichungen sind in Normalform.
II	$y = 3x - 7$		
Gleichung I und II gleichsetzen.			
I = II	$2x + 3 = 3x - 7$		
I = II	$2x + 3 = 3x - 7$	$\mid -2x$	
I = II	$3 = x - 7$	$\mid +7$	
I = II	$x = 10$		

Schritt 2			
I	$y = 2 \cdot 10 + 3$		
I	$y = 23$		

Schritt 3			
	$L = \{(10 \mid 23)\}$		

1. So gehst du vor:

Bestimme die Lösungsmenge.

$x = 6 - 2y$	Gleichung I
$-3y = 2 + 7x$	Gleichung II

Gleichung I in II eingesetzt:

$-3y = 2 + 7 \cdot (6 - 2y)$	Klammer auflösen
$-3y = 2 + 42 - 14y$	+14y und zusammenfassen
$11y = 44$	:11
$y = 4$	y = 4 in Gleichung I einsetzen
$x = 6 - 2 \cdot 4 = -2$	$L = \{(-2 \mid 4)\}$

2. Mach es nach:

Bestimme die Lösungsmenge.

$y = -3x + 2$	Gleichung I
$6x + y = -4$	Gleichung II

Gleichung I in II eingesetzt:

$6x + (-3x + 2) = -4$	Klammer auflösen
$3x + 2 =$ ____________	–2 und zusammenfassen
$3x =$ ____________	:3
$x =$ ____________	x = –2 in Gleichung I einsetzen
$y =$ ____________	$L = \{(\quad \mid \quad)\}$

3. Jetzt wird es schwieriger:

Bestimme die Lösungsmenge.

$3x = 6y - 6$	Gleichung I
$y + 11 = 2x$	Gleichung II
$3x =$ ____________	Gleichung I geteilt durch 3
$x =$ ____________	Die Gleichung in Gleichung II einsetzen
$y + 11 =$ ____________	Klammer auflösen, die Gleichung lösen und
$y =$ ____________	y = 5 in Gleichung I einsetzen
$x =$ ____________	$L = \{(\quad \mid \quad)\}$

4. Jetzt kannst du es: (Arbeite im Heft.)

Bestimme die Lösungsmenge.

$3x = 1 + 2y$
$2y = 2 - 6x$

...dy Seifert: Mathematik ganz einfach mit Lösungsbeispielen 9/10
...uer Verlag

Einsetzungsverfahren

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe

Ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen wurde mit dem Einsetzungsverfahren gelöst.
Beschreibe ausführlich die einzelnen Schritte.
Die folgenden Formulierungen helfen dir:

Die Lösungsmenge wird angegeben.
Auf beiden Seiten werden 14y addiert.
Der y-Wert ($y = 4$) wurde in Gleichung II eingesetzt.
Auf beiden Seiten wird durch 11 geteilt.
Durch weiteres Umformen erhält man den x-Wert.
Die neue Gleichung enthält nur noch y als Variable.
Durch weiteres Umformen erhält man den y-Wert.
Zunächst wird die Klammer aufgelöst.
$y = 4$ kann man nun in eine der Ausgangsgleichungen einsetzen, um x zu berechnen.
Gleichartige Terme werden zusammengefasst.
Der Term $(6 - 2y)$ wird anstelle von x in Gleichung II eingesetzt.

Schritt 1		
I	$x = 6 - 2y$	Die Gleichungen sind zwar nicht in Normalform, aber bei Gleichung I steht die Variable x auf einer Seite.
II	$-3y = 2 + 7x$	
Gleichung I in II einsetzen.		
I in II	$-3y = 2 + 7 \cdot (6 - 2y)$	
I in II	$-3y = 2 + 42 - 14y$	
I in II	$-3y = 44 - 14y$	
I in II	$11y = 44$	
I in II	$y = 4$	

Schritt 2		
II	$-3 \cdot 4 = 2 + 7x$	
II	$x = -2$	

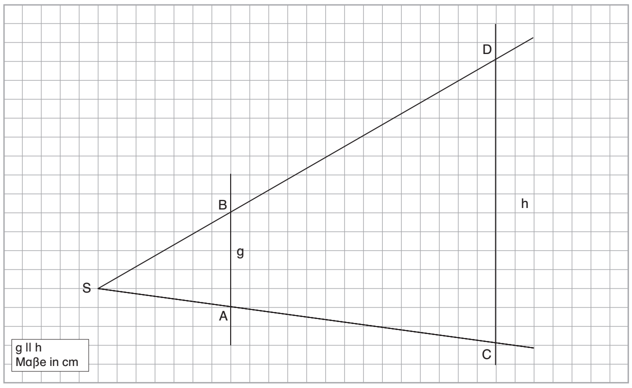
Schritt 3		
	$L = \{(-2 \mid 4)\}$	

1. Strahlensatz

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe a

Der Lückentext beschreibt den 1. Strahlensatz in Worten. Setze die folgenden Wörter (bzw. Wortteile) in die Lücken im Text.



Anfangspunkt – Längen – Parallelen –
Schnittpunkte – Strahl – Strahlen
Streckenabschnitten – Streckenabschnitte

Zwei ______________ , die von einem gemeinsamen ____________________ S ausgehen, werden von zwei __________________ geschnitten. Dabei entstehen die ______________________ A, B, C und D. Die ____________ von zwei ________________________________ auf dem einen Strahl (z. B. $\overline{SC}$ und $\overline{SA}$) verhalten sich wie die Längen der entsprechenden ________________________________ auf dem anderen __________ ($\overline{SD}$ und $\overline{SB}$).

Aufgabe b

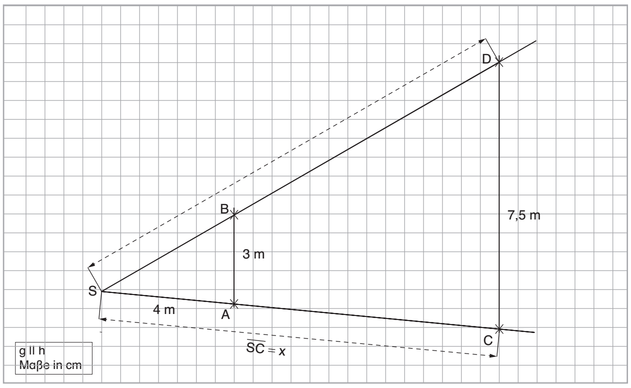
In dem Worträtsel sind zehn Begriffe versteckt. Schreibe die Begriffe neben das Rätsel.

H	A	L	B	G	E	R	A	D	E	______________
Ö	G	A	S	L	Ä	N	G	E	M	______________
E	P	M	T	A	Z	S	L	Ü	P	______________
M	U	L	R	K	E	T	E	I	A	______________
A	N	F	A	N	G	R	I	A	R	______________
B	K	E	H	C	E	E	C	Z	A	______________
W	T	N	L	Y	R	C	H	E	L	______________
S	I	Ä	E	C	A	K	U	K	L	______________
L	Y	Q	N	E	D	E	N	C	E	______________
A	R	G	M	Ä	E	D	G	B	L	______________
V	E	R	H	Ä	L	T	N	I	S	

dy Seifert: Mathematik ganz einfach mit Lösungsbeispielen 9/10
uer Verlag

1. So gehst du vor:

Berechne den fehlenden Streckenabschnitt x.



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\overline{SA}}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \cdot \overline{SA} = x$$

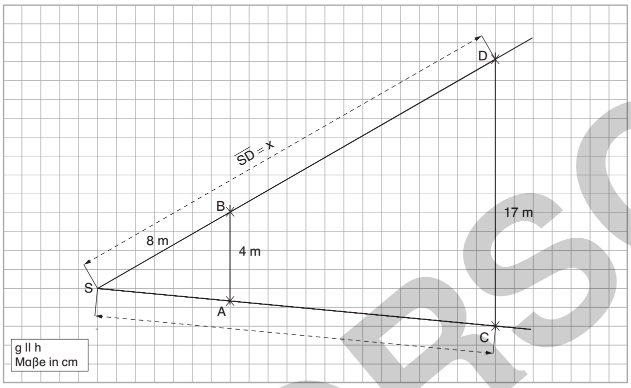
$$\frac{7{,}5\,m}{3\,m} \cdot 4\,m = x$$

$x = 2{,}5 \cdot 4$ m
$x = 10$ m

$\overline{SC} = 10$ m

2. Mach es nach:

Berechne den fehlenden Streckenabschnitt x.



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SB}}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{x}{\overline{SB}}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \cdot \overline{SB} = x$$

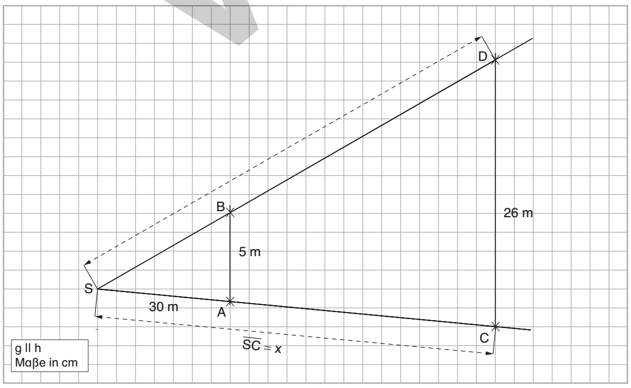
x = ____________________

x = ____________________

$\overline{SC}$ = __________________

3. Jetzt wird es schwieriger:

Berechne den fehlenden Streckenabschnitt x.



$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$$

________________________ = x

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ = __________________

____

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ · __________________ = x

____

4. Jetzt kannst du es: (Arbeite im Heft.)

Zeichne eine Skizze und berechne den fehlenden Streckenabschnitt.

$\overline{AB} = 20$ m $\overline{CD} = 202$ m $\overline{SB} = 15$ m

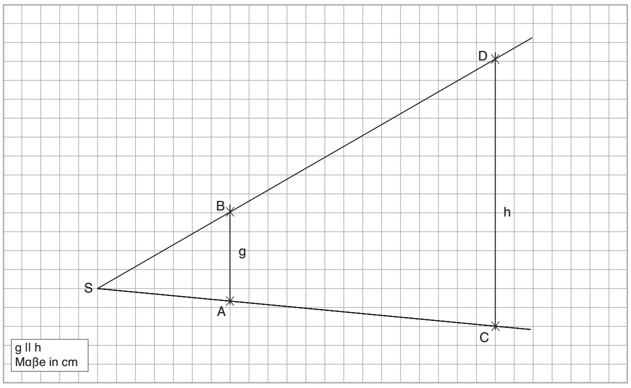
…dy Seifert: Mathematik ganz einfach mit Lösungsbeispielen 9/10
…uer Verlag

2. Strahlensatz

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe a

Der Lückentext beschreibt den 2. Strahlensatz in Worten. Setze die folgenden Wörter (bzw. Wortteile) in die Lücken im Text.



Anfangspunkt – Anfangspunkt – Parallelen
Parallelen – Schnittpunkte – Strahl –
Streckenabschnitte

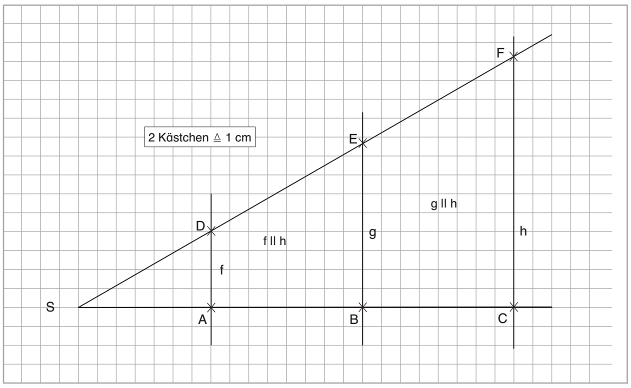
Zwei Strahlen, die von einem gemeinsamen ________________ S ausgehen, werden von zwei ______________ geschnitten.

Dabei entstehen die ________________ A, B, C und D.

Die Längen der ___________ auf den ___________ ($\overline{AB}$ und $\overline{CD}$), verhalten sich wie die vom __________ gemessenen Längen der entsprechenden Abschnitte ($\overline{SA}$ und $\overline{SC}$ oder $\overline{SB}$ und $\overline{SD}$) auf jedem ____________ .

Aufgabe b

Stelle möglichst viele Verhältnisgleichungen wie im Beispiel auf.



Beispiel:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{12}{8}$$

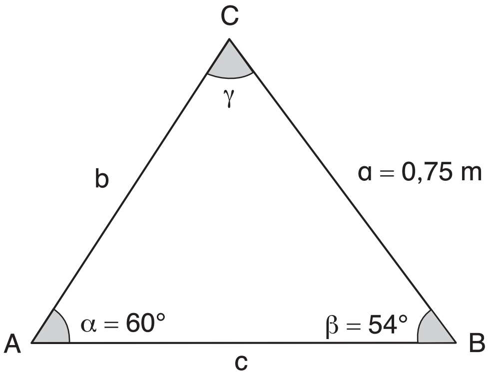
$$\frac{72}{48} = \frac{72}{48}$$

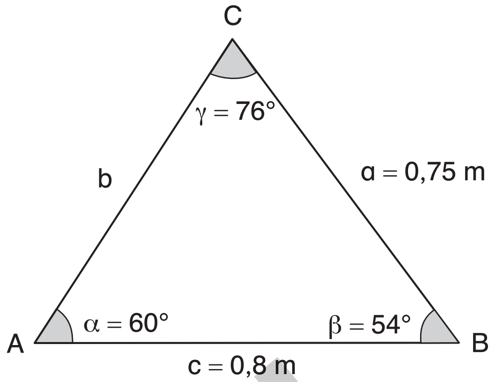
Sinussatz

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe a

Wie lauten zwei mögliche Sinussätze, mit denen man die Seitenlänge b bestimmen kann?





Notiere:

Aufgabe b

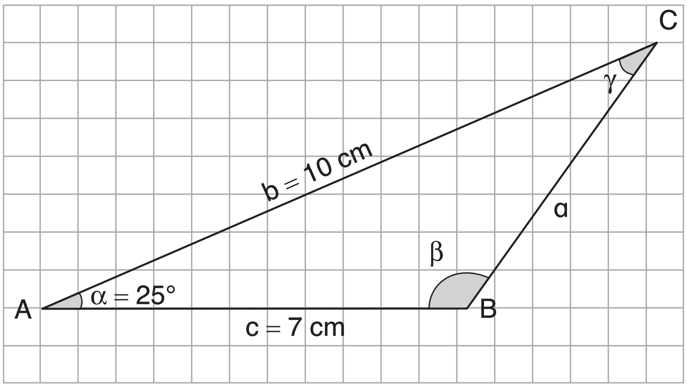
In dem Worträtsel sind zehn Begriffe versteckt. Schreibe die Begriffe neben das Rätsel.

F	T	K	A	T	H	E	T	E	H
E	G	V	K	M	W	A	E	E	C
H	Y	P	O	T	E	N	U	S	E
K	F	S	S	A	W	K	P	I	P
Q	D	G	I	N	W	A	U	N	K
M	S	J	N	G	L	T	N	U	M
W	E	S	U	E	R	H	K	S	F
A	I	K	S	N	Ü	E	T	T	C
R	T	H	C	S	L	T	X	O	I
H	E	W	I	N	K	E	L	A	V
Z	D	R	E	I	E	C	K	S	T

dy Seifert: Mathematik ganz einfach mit Lösungsbeispielen 9/10
uer Verlag

Berechne die Länge der Seite a. Runde auf die erste Nachkommastelle.

1. So gehst du vor:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

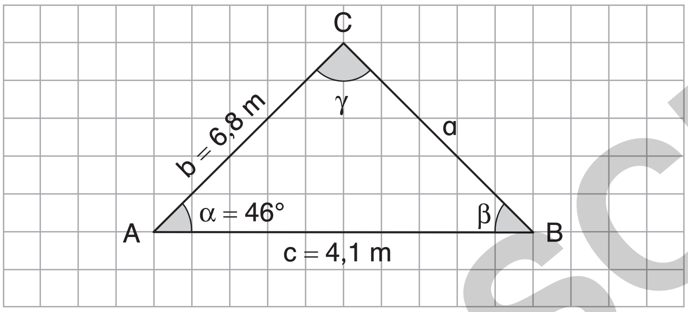
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

$a = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos 25°}$ cm

$a = \sqrt{149 - 140 \cdot \cos 25°}$ cm

$a \approx 4{,}7$ cm

2. Mach es nach:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

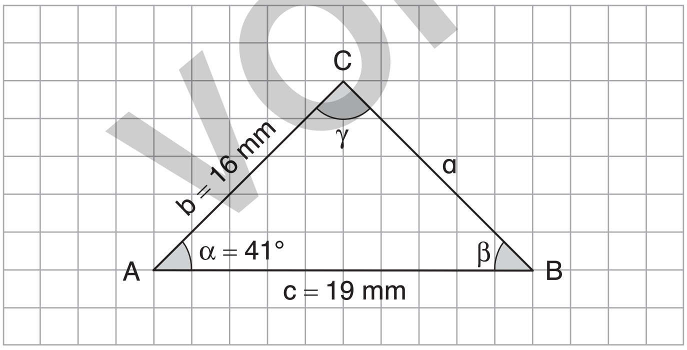
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

a = √ ____________________

a = ____________________

a ≈ ____________________

3. Jetzt wird es schwieriger:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

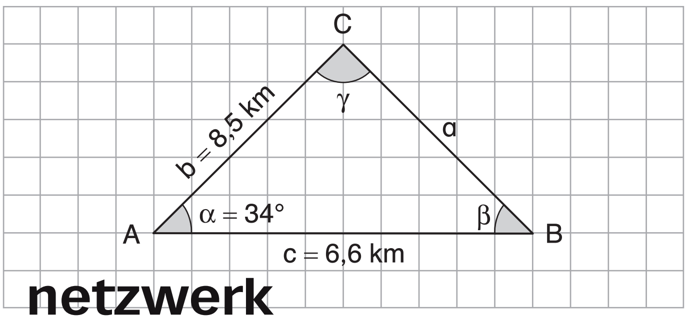
a = ____________________

a = ____________________

a = ____________________

a ≈ ____________________

4. Jetzt kannst du es:



Kosinussatz

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe a

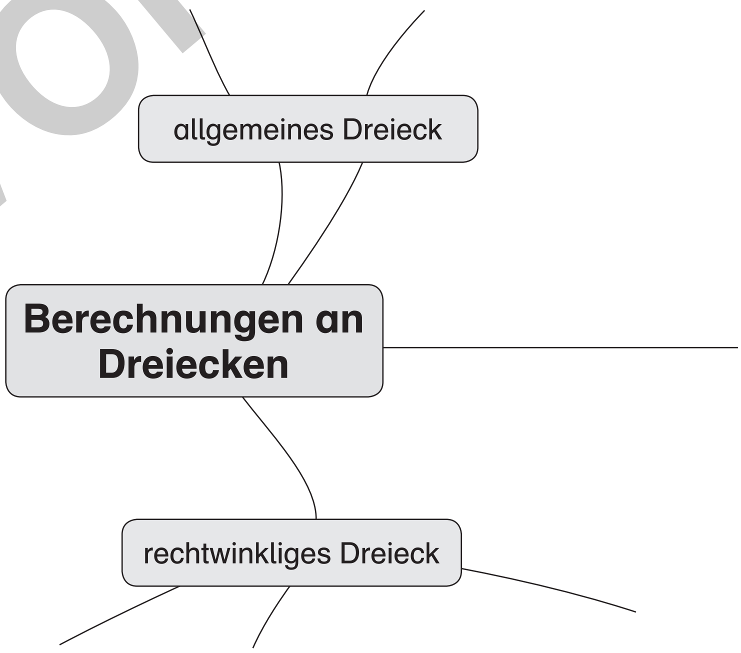
Wie lautet der jeweilige Kosinussatz, wenn die Seitenlängen c bzw. b gesucht sind?

Notiere:

Aufgabe b

Erstelle eine Mind-Map. Nutze folgende Begriffe und Formeln:

Kosinus	Tangens	$c^2 = a^2 + b^2$
Kosinussatz	Winkelsummensatz	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
Pythagoras	Gegenkathete / Ankathete	$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$
Sinus	Ankathete / Hypotenuse	
Sinussatz	Gegenkathete / Hypotenuse	

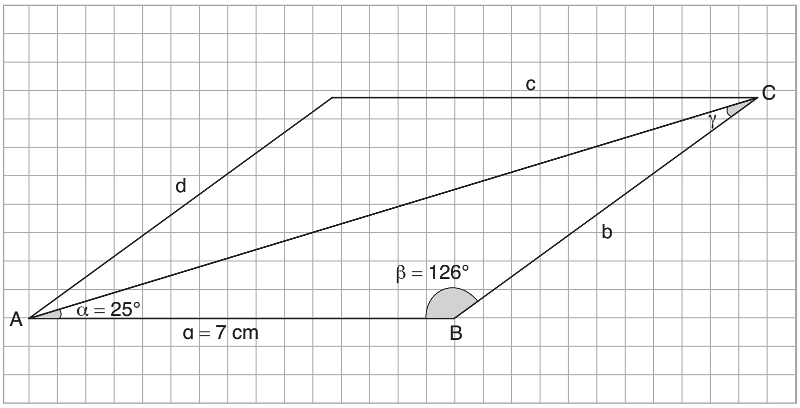


…dy Seifert: Mathematik ganz einfach mit Lösungsbeispielen 9/10
…uer Verlag

Runde auf die erste Nachkommastelle.

1. So gehst du vor:

In einem Parallelogramm ist die Seite a = 7 cm lang.
Des Weiteren kennt man den Winkel $\beta = 126°$. Der Winkel zwischen der Seite a und der Diagonalen beträgt 25°. Fertige eine Skizze an und berechne den Umfang des Parallelogramms.



a) $\gamma = 180° - \alpha - \beta°$
$\gamma = 180° - 25° - 126° = 29°$

b) $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{b}$

$\dfrac{\sin 29°}{\sin 25°} = \dfrac{7}{b}$ cm $\quad | \cdot b \cdot \dfrac{\sin 25°}{\sin 29°}$

$b = 7\text{ cm} \cdot \dfrac{\sin 25°}{\sin 29°} \approx 6{,}1\text{ cm}$

c) $U \approx 2 \cdot 7\text{ cm} + 2 \cdot 6{,}1\text{ cm} = 26{,}2\text{ cm}$

2. Mach es nach:

In einem Parallelogramm ist die Seite a = 3,2 cm lang.
Des Weiteren kennt man den Winkel $\beta = 21°$.
Der Winkel zwischen der Seite a und der Diagonalen beträgt 25°.

Fertige eine Skizze an und berechne den Umfang des Parallelogramms.

a) $\gamma = 180° - 21° - 68° = 91°$

b) $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{b}$

$\dfrac{\sin 91°}{\sin 21°} = \dfrac{\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_} \quad | \cdot b \cdot \dfrac{\sin 21°}{\sin 91°}$

$b = 3{,}2\text{ cm} \cdot \dfrac{\sin 21°}{\sin 91°} \approx$ __________

c) $U \approx 2 \cdot 3{,}2\text{ cm} + 2 \cdot 1{,}1\text{ cm} \approx$ ________

3. Jetzt wird es schwieriger:

In einem Parallelogramm ist die Seite a = 35 m lang. Des Weiteren kennt man den Winkel $\beta = 112°$. Der Winkel zwischen der Seite a und der Diagonalen beträgt 23°.

Fertige eine Skizze im Maßstab 1:1000 an und berechne den Umfang des Parallelogramms.

a) $\gamma = 180° - 23° - 112° = 45°$

b) $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{b}$

$\dfrac{\sin 45°}{\sin 23°} = \dfrac{\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_} \quad | \cdot b \cdot$ ______

b = __________

c) U ≈ __________

4. Jetzt kannst du es: (Arbeite im Heft.)

In einem Parallelogramm ist die Seite a = 44,4 m lang. Des Weiteren kennt man den Winkel $\beta = 24°$.
Der Winkel zwischen der Seite a und der Diagonalen beträgt 36°.
Fertige eine Skizze im Maßstab 1 : 1000 an und berechne den Umfang des Parallelogramms.

Exponentialfunktion

Geh der Sache auf den Grund!

Aufgabe a

Gegeben ist die Funktion f(x) mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2^x$.
Lege eine Wertetabelle mit x-Werten von –3 bis +3 an (Schrittweite 1).

x							
y							

Aufgabe b

Gegeben ist die Funktion g(x) mit der Funktionsgleichung $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lege eine Wertetabelle mit x-Werten von –3 bis +3 an (Schrittweite 1).

x							
y							

Aufgabe c

Gegeben ist die Funktion h(x) mit der Funktionsgleichung $h(x) = (1)^x$.
Lege eine Wertetabelle mit x-Werten von –3 bis +3 an (Schrittweite 1).

x							
y							

Aufgabe d (Arbeite im Heft.)

Zeichne die Funktionsgraphen der Funktionen f(x), g(x) und h(x) aus den Aufgabe a, b und c in ein Koordinatensystem.

Aufgabe e (Arbeite im Heft.)

Notiere die Antworten:
1. Welchen gemeinsamen Punkt haben die drei Funktionen f(x), g(x) und h(x)?
2. Für welche Funktion verläuft der Graph parallel zu x-Achse?
3. Für welche Funktion steigt der Graph?
4. Für welche Funktion fällt der Graph?
5. Wo schneiden die Funktionen f(x), g(x) und h(x) die x-Achse?
6. Wo schneiden die Funktionen f(x), g(x) und h(x) die y-Achse?
7. Wie verläuft der Graph der Funktion g(x), wenn die x-Werte immer größer werden?