

Inhaltsverzeichnis

Vorwort 4

Gleichungen - Einführung 5-10

Gleichungen – was sind das? 5

Erste Bemerkungen zur Berechnung von Variablen 6-7

Fachbegriffe in Gleichungen 8

Merkblatt 1 und 2 9-10

Lineare Gleichungen mit einer Variablen 11-33

Addition und Subtraktion 11-12

Multiplikation und Division 13-15

Einfache Gleichungen durch Probieren lösen 16

Bruchgleichungen 17-19

Gleichungen mit Klammern 20-21

Zeichnerische Lösung 22-23

Merkblatt Textaufgaben 24

20 Textaufgaben 25-30

Test/Arbeit 31-33

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen 34-64

Einführung 34-35

Vergleich des Ablaufs von drei Verfahren 36-40

Welches Verfahren empfiehlt sich wann? 41-42

Bruchgleichungen 43-44

Gleichungen mit Klammern 45

Fehlersuche und Verbesserung 46-47

Zeichnerische Lösung 48-51

20 Textaufgaben 52-59

Test/Arbeit 60-64

Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen 65-82

Einführung 65

Wenn jede Gleichung drei Variablen enthält, ... 66-68

Wenn zwei Gleichungen nur zwei Variablen enthalten, ... 69-71

15 Textaufgaben 72-80

Test/Arbeit 81

Was weißt du, was kannst du? 82

Lösungen 83-128

—

LG 1

LGS 2

LGS 3





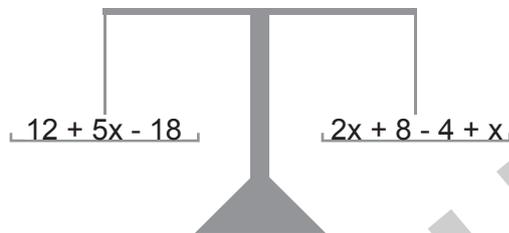
Erste Bemerkungen zur Berechnung von Variablen

1. Die Variablen (= Unbekannte, Platzhalter) lassen sich durch Umformung der Gleichungen berechnen.
2. Mit Umformungen sind die Umstellungen von Teilen (= Glieder) der Gleichungen gemeint.
3. Wenn eine Gleichung vorliegt, ist (sogleich) zu schauen, ob gleichartige Glieder vorhanden sind, die zusammengefasst werden können.

Zwei Beispiele: $8 - 4 \rightarrow 4$
 $2x + x \rightarrow 3x$

4. Gleichungen lassen sich mit Balkenwaagen vergleichen.
5. Eine Gleichung ist wahr, sofern sich die linke und rechte Seite im Gleichgewicht befinden.

Beispiel:



6. Mit anderen Worten, der Wert auf der linken Seite entspricht dem Wert auf der rechten Seite.
7. Im Weiteren gilt: Alle Rechenoperationen, die auf der linken Seite der Gleichung durchgeführt werden, müssen auch gleichzeitig auf der rechten Seite stattfinden und umgekehrt.
8. Zum Abschluss der Berechnung einer Variablen ist auf der einen (möglichst linken) Seite der Gleichung die Variable zu nennen, gegenüber der Zahlenwert dieser Variablen.
Beispiele: $x = 5$; $y = 3$
9. Zum Schluss wird durch Einsetzen der berechneten Zahlenwerte in die Ausgangsgleichungen überprüft, ob der oder die berechneten Zahlenwerte tatsächlich die Richtigkeit der Gleichungen bestätigt oder nicht.

Diese Überprüfung(en) bezeichnet man als Probe(n).



Erste Bemerkungen zur Berechnung von Variablen

Aufgabe 1: Umformungen von Gleichungen – was bedeutet das?



Aufgabe 2: Was lässt sich mit gleichartigen Gliedern in Gleichungen machen?



Aufgabe 3: Womit sind Gleichungen vergleichbar?



Aufgabe 4: Wann ist eine Gleichung wahr?



Aufgabe 5: Was ist bei der Durchführung von Rechenoperationen in Gleichungen unbedingt zu beachten?



Aufgabe 6: Was muss zum Abschluss der Berechnung einer Variablen auf der einen Seite der Gleichung stehen, was auf der anderen Seite?



Aufgabe 7: Auf welcher Seite der Gleichung wird zum Schluss normalerweise die Variable (z.B. x) genannt?



Aufgabe 8: Wozu dienen Proben?





Fachbegriffe in Gleichungen

In linearen Gleichungen mit Variablen wird zwischen drei Begriffen unterschieden:

- Variable (= Unbekannte, Platzhalter)

Eine Variable ist ein Symbol (gewöhnlich ein Buchstabe), für den Zahlen eingesetzt werden können.

variabilis (lat.) = *veränderlich*

- Koeffizient (= Beizahl, Vorzahl)

Ein Koeffizient ist eine Zahl, die bei/vor der Variablen als Faktor steht.

con (lateinisch) = *zusammen, mit* +
efficere (lateinisch) = *bewirken*

- Konstante *

Eine Konstante ist eine gegebene Zahl, die nicht unmittelbar vor einer Variablen steht.

constans (lateinisch) = *stetig, feststehend*

Beispiel:

$$4 \cdot x + 3 = 23$$

Bei einer Variablen (z.B. x) ist 1 der Koeffizient. Die 1 wird aber nicht geschrieben.

Gegeben ist die Gleichung: $7 = 4a - a - 17$

$a =$ _____

Bestimme etwaige Variablen, Koeffizienten und Konstanten der genannten Gleichung.

$4 =$ _____

$7 =$ _____

$17 =$ _____

Bedenke:

Gleichartige Glieder lassen sich in Gleichungen zusammenfassen, d.h.

- mehrere Variable können zusammengefasst werden, wenn sie die gleiche Benennung aufweisen.

Beispiel:

$$3a + a - 2a = 2a$$

- Auch mehrere Konstante (=Zahl ohne Benennung) können zusammengefasst werden.

Beispiel:

$$5 - 4 + 3 = 4$$



Merkblatt 1

Gehe gezielt vor, um lineare Gleichungen zu lösen.

Beispielaufgabe:

$$3x - 7 = x + 13$$

1. Bringe alle Variablen durch Addition oder Subtraktion auf die linke Seite der Gleichung.
Im oberen Beispiel wird die Variable x durch die Rechenoperation $-x$ auf die linke Seite der Gleichung gebracht:

$$\begin{array}{l} 3x - 7 = x + 13 \quad | -x \\ 3x - x - 7 = 13 \end{array}$$

2. Bringe alle Konstanten durch Addition oder Subtraktion auf die rechte Seite der Gleichung.
Im oberen Beispiel wird die Zahl 7 durch die Rechenoperation -7 auf die rechte Seite der Gleichung gebracht:

$$\begin{array}{l} 3x - x - 7 = x + 13 \quad | +7 \\ 3x - x = 13 + 7 \end{array}$$

3. In der Gleichung werden die gleichartigen Glieder der Gleichung zusammengefasst.
Im oberen Beispiel werden zusammengefasst: Auf der linken Seite der Gleichung $3x - x$ zu $2x$, auf der rechten Seite $13 + 7$ zu 20.

$$2x = 20$$

4. Die Gleichung wird durch den Koeffizienten vor x (im oberen Beispiel ist dies 2) dividiert, sodass sich als Resultat 10 ergibt:

$$\begin{array}{l} 2x = 20 \quad | :2 \\ \underline{x = 10} \end{array}$$

5. Schließlich gilt es, die Probe durchzuführen, indem der Wert für x (im oberen Beispiel ist dies 10) in die Ausgangsgleichung eingesetzt wird:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 10 - 7 = 10 + 13 \\ 30 - 7 = 23 \\ 23 = 23 \end{array}$$

Drei Beispiele für die Berechnung jeweils einer Variablen in sehr einfach aufgebauten Gleichungen:

→
$$\begin{array}{l} x + 34 = 59 \\ x + 34 - 34 = 59 - 34 \\ \underline{x = 25} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation -34 auf jeder Seite der Gleichung

Probe:
Einsetzen der errechneten Zahl 25 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 25 + 34 = 59 \\ 59 = 59 \end{array}$$

→
$$\begin{array}{l} x - 64 = 86 \\ x - 64 + 64 = 86 + 64 \\ \underline{x = 150} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation $+64$ auf jeder Seite der Gleichung

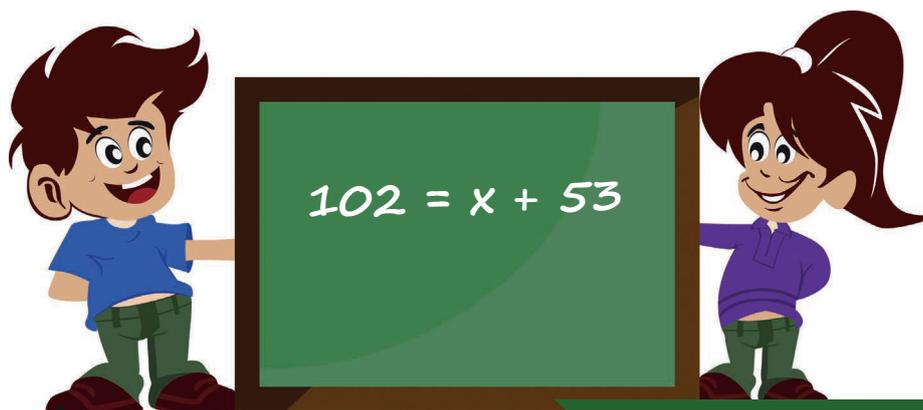
Probe:
Einsetzen der errechneten Zahl 150 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 150 - 64 = 86 \\ 86 = 86 \end{array}$$

→
$$\begin{array}{l} 79 = x - 97 \\ 79 + 97 = x - 97 + 97 \\ 176 = x \\ \underline{x = 176} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation $+97$ auf jeder Seite der Gleichung
| Seitentausch

Probe:
Einsetzen der errechneten Zahl 176 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 79 = 176 - 97 \\ 79 = 79 \end{array}$$



Vier Beispiele für die Berechnung jeweils einer Variablen in sehr einfach aufgebauten Gleichungen.

Gewöhnlich lässt man in Gleichungen vor Variablen den Malpunkt weg. Anstelle von u.a. $6 \cdot x$ schreibt man nur $6x$.

→
$$\begin{array}{l} 3x = 21 \\ 3x : 3 = 21 : 3 \\ \underline{x = 7} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation :3 auf jeder Seite der Gleichung

Probe:

Einsetzen der errechneten Zahl 7 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 7 = 21 \\ 21 = 21 \end{array}$$

→
$$\begin{array}{l} 112 = 8x \\ 112 : 8 = 8x : 8 \\ 14 = x \\ \underline{x = 14} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation :8 auf jeder Seite der Gleichung
| Seitentausch

Probe:

Einsetzen der errechneten Zahl 14 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 112 = 8 \cdot 14 \\ 112 = 112 \end{array}$$

→
$$\begin{array}{l} x : 9 = 17 \\ x : 9 \cdot 9 = 17 \cdot 9 \\ \underline{x = 153} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation $\cdot 9$ auf jeder Seite der Gleichung

Probe:

Einsetzen der errechneten Zahl 153 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 153 : 9 = 17 \\ 17 = 17 \end{array}$$

Statt des Geteilt-Zeichens (:) wird in Gleichungen häufig der Bruchstrich geschrieben.

→
$$\begin{array}{l} 19 = \frac{x}{12} \\ 19 \cdot 12 = \frac{x}{12} \cdot 12 \\ 228 = x \\ \underline{x = 228} \end{array}$$
 | Durchführung der Rechenoperation $\cdot 12$ auf jeder Seite der Gleichung, danach rechts kürzen
| Seitentausch

Probe:

Einsetzen der errechneten Zahl 228 für x in der Ausgangsgleichung

$$\begin{array}{l} 19 = \frac{228}{12} \\ 19 = 19 \end{array}$$

Löse die anschließenden Aufgaben und mache jeweils die 3 Proben.

Name: _____

Datum: _____

Aufgabe 1:

| | |
|-----|------------------|
| I | $x + y + z = 35$ |
| II | $y = x + 6$ |
| III | $z = x + 14$ |

Aufgabe 2:

| | |
|-----|------------------|
| I | $x + y = 19 - z$ |
| II | $x = 2y$ |
| III | $z = y - 5$ |

Aufgabe 3:

| | |
|-----|---------------------------------|
| I | $x + y = z + 13$ |
| II | $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 8$ |
| III | $5x - 2 = \frac{z}{3} + 7$ |

Aufgabe 4:

| | |
|-----|---------------------|
| I | $3x + 2y = 2z$ |
| II | $5(x + 4) = 3z - 5$ |
| III | $y = x + 5$ |

Aufgabe 5:

| | |
|-----|--|
| I | $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 10$ |
| II | $5x - 4y + z = -14$ |
| III | $x + y - \frac{z}{2} = 26$ |

Aufgabe 6:

| | |
|-----|---------------------|
| I | $4x - 2y + 6z = 50$ |
| II | $x + y + z = 15$ |
| III | $2x - 3y + 5z = 27$ |

Aufgabe 7:

| | |
|-----|---|
| I | $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{z}{8} + 1$ |
| II | $3x - 5y = 4z - 26$ |
| III | $x + y = z - 6$ |

Aufgabe 8: Eine Fußballmannschaft trug während einer Saison 30 Punktspiele aus. Dabei gewann das Team doppelt so viele Spiele wie es verlor. Die Mannschaft verlor 2 Spiele mehr als sie unentschieden spielte. Wie viele Punktspiele gewann die Mannschaft, wie viele Punktspiele verlor sie und wie oft spielte sie unentschieden?

Aufgabe 9: Die Summe von 3 gesuchten natürlichen Zahlen beträgt 94. Dividiert man die zweite gesuchte Zahl durch die erste gesuchte Zahl, ist das Ergebnis 2. Wird von der dritten gesuchten Zahl die zweite gesuchte Zahl subtrahiert, lautet das Resultat 9. Wie heißen die 3 gesuchten Zahlen?

Lösungen

Seite 5

Aufgabe 1: Individuelle Lösungen

Seite 7

Aufgabe 1: Teile (= Glieder) der Gleichung stellt man um.

Aufgabe 2: Gleichartige Glieder lassen sich zusammenfassen.

Aufgabe 3: Gleichungen sind mit Balkenwaagen vergleichbar, bei denen sich die linke Seite mit der rechten Seite im Gleichgewicht befindet.

Aufgabe 4: Eine Gleichung ist wahr, wenn der Wert auf der linken Seite dem Wert auf der rechten Seite entspricht.

Aufgabe 5: Alle Rechenoperationen müssen gleichzeitig auf der linken sowie auf der rechten Seite der Gleichung durchgeführt werden.

Aufgabe 6: Auf der einen Seite muss die Variable genannt werden, auf der anderen Seite der Zahlenwert dieser Variablen.

Aufgabe 7: Normalerweise wird die Variable auf der linken Seite der Gleichung notiert.

Aufgabe 8: Die Proben dienen dazu festzustellen, ob die berechneten Zahlenwerte die Richtigkeit der Gleichungen bestätigen oder nicht.

Seite 8

Aufgabe 1: a = Variable
4 = Koeffizient
7 = Konstante
17 = Konstante

Seite 12

Aufgabe 1: a)

$$\begin{array}{l} x + 27 = 63 \quad | - 27 \\ x = 63 - 27 \\ x = 36 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 36 + 27 = 63 \\ 63 = 63 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} x + 48 = 94 \quad | - 48 \\ x = 94 - 48 \\ x = 46 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 46 + 48 = 94 \\ 94 = 94 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} x - 32 = 45 \quad | + 32 \\ x = 45 + 32 \\ x = 77 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 77 - 32 = 45 \\ 45 = 45 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} x - 83 = 35 \quad | + 83 \\ x = 35 + 83 \\ x = 118 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 118 - 83 = 35 \\ 35 = 35 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} 59 = x - 72 \quad | + 72 \\ 59 + 72 = x \\ 131 = x \quad | \text{ Seitentausch} \\ x = 131 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 59 = 131 - 72 \\ 59 = 59 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} 27 = x - 112 \quad | + 112 \\ 27 + 112 = x \\ 139 = x \quad | \text{ Seitentausch} \\ x = 139 \end{array} \qquad \text{Probe:} \quad \begin{array}{l} 27 = 139 - 112 \\ 27 = 27 \end{array}$$

1. Je nachdem wie viele Variablen in linearen Gleichungssystemen vorhanden sind und als Werte gesucht werden, muss von entsprechend vielen Gleichungen ausgegangen werden.
2. Bei linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen werden somit drei Gleichungen benötigt, die miteinander im Zusammenhang stehen.
3. Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen lassen sich u.a. folgendermaßen lösen:
4. Mit Hilfe der Einsetz(ungs)methode bzw. Additionsmethode werden aus den drei Gleichungen mit drei Variablen zwei Gleichungen mit zwei Variablen hergestellt. Eine Variable wird (also) eliminiert.
„Aus drei mache zwei Gleichungen!“
5. Danach wird erneut mit Hilfe der Einsetz(ungs)methode oder Additionsmethode aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen eine Gleichung mit nur noch einer Variablen hergestellt. Folglich wird eine weitere Variable eliminiert.
„Aus zwei mache eine Gleichung!“
6. Der Wert der einen, übriggebliebenen Variablen wird nun berechnet.
7. Anschließend lässt sich die nächste Variable berechnen, indem der Wert der zuerst ermittelten Variablen in eine der beiden hergestellten Gleichungen mit zwei Variablen eingesetzt wird. Dazu kann man die bereits umgeformte einfachste Form nutzen.
8. Die dritte Variable kann auf folgende Weise berechnet werden:
Die Werte der beiden bereits bekannten Variablen werden in eine der Gleichungen mit drei Variablen eingesetzt.
9. Schließlich gilt es drei Proben durchzuführen. Sie dienen dazu zu überprüfen, ob die drei berechneten Werte der Variablen tatsächlich die Aussagen der drei Ausgangsgleichungen erfüllen.
10. In linearen Gleichungssystemen mit drei Unbekannten werden als Variable oft die Buchstaben x, y und z gebraucht.

Aufgabe 1: *Richtig oder falsch? Kreuze an, welche folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. Verbessere anschließend die Sätze, die falsche Aussagen enthalten.*

| | | Richtig | Falsch |
|----|---|---------|--------|
| a) | Zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen sind drei beliebige Gleichungen erforderlich. | | |
| b) | Die Anwendung der Einsetz(ungs)methode oder der Additionsmethode hilft dabei, lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen zu lösen. | | |
| c) | Aus drei Gleichungen mit drei Variablen werden zunächst zwei Gleichungen mit einer Variablen erstellt, dann eine Gleichung mit einer Variablen. | | |
| d) | Eine Variable kann erst dann in einer Gleichung ausgerechnet werden, wenn die Gleichung nur noch eine Variable aufweist. | | |
| e) | Sind die drei Variablen berechnet, sollte man zum Abschluss zwei Proben durchführen. | | |
| f) | Meistens stehen in linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen die Buchstaben x, y und z für die Unbekannten. | | |

Lösungen

Seite 42

Aufgabe 1: Rechnung: I $y = 3x - 14$
II $4y + 2x = 28$

Einsetzung I in II:

$$\begin{array}{r} \text{II} \quad 4y + 2x = 28 \\ 4 \cdot (3x - 14) + 2x = 28 \\ 12x - 56 + 2x = 28 \\ 14x - 56 = 28 \quad | + 56 \\ 14x = 84 \quad | : 14 \\ \underline{x = 6} \end{array}$$

Berechnung des y-Wertes:
x = 6 in I eingesetzt:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad y = 3x - 14 \\ y = 3 \cdot 6 - 14 \\ y = 18 - 14 \\ \underline{y = 4} \end{array}$$

EINSETZUNGSMETHODE

Probe: I $4 = (3 \cdot 6) - 14$
 $4 = 18 - 14$
 $4 = 4$

Probe: II $(4 \cdot 4) + (2 \cdot 6) = 28$
 $16 + 12 = 28$
 $28 = 28$

Aufgabe 2: Rechnung: I $x = 2y - 10$
II $x = -3y + 25$

Gleichsetzung I = II:

$$\begin{array}{r} 2y - 10 = -3y + 25 \quad | + 3y + 10 \\ 5y = 35 \quad | : 5 \\ \underline{y = 7} \end{array}$$

Berechnung des x-Wertes:
y = 7 in I eingesetzt:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x = 2y - 10 \\ x = (2 \cdot 7) - 10 \\ x = 14 - 10 \\ \underline{x = 4} \end{array}$$

GLEICHSETZUNGSMETHODE

Probe: I $4 = (2 \cdot 7) - 10$
 $4 = 14 - 10$
 $4 = 4$

Probe: II $4 = (-3) \cdot 7 + 25$
 $4 = -21 + 25$
 $4 = 4$

Aufgabe 3: Rechnung: I $x + 4y = 21$ | +
II $5x - 4y = 33$ | : 6
 $6x = 54$
 $\underline{x = 9}$

Berechnung des y-Wertes:
x = 9 in I eingesetzt:

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad x + 4y = 21 \\ 9 + 4y = 21 \quad | - 9 \\ 4y = 12 \quad | : 4 \\ \underline{y = 3} \end{array}$$

ADDITIONSMETHODE

Probe: I $9 + (4 \cdot 3) = 21$
 $9 + 12 = 21$
 $21 = 21$

Probe: II $(5 \cdot 9) - (4 \cdot 3) = 33$
 $45 - 12 = 33$
 $33 = 33$

Seite 43

Aufgabe 1: $\frac{x+y}{4} + 5 = 7$ \wedge $\frac{y-1}{y-x} - 1 = 1$

I $\frac{x+y}{4} + 5 = 7$ | - 5

$\frac{x+y}{4} = 2$ | $\cdot 4$

I' $x + y = 8$

II $\frac{y-1}{y-x} - 1 = 1$ | + 1

$\frac{y-1}{y-x} = 2$ | $\cdot (y-x)$

$y-1 = 2 \cdot (y-x)$

$y-1 = 2y-2x$ | + 2x - 2y

$2x-y-1=0$ | + 1

II' $2x-y=1$