Ein Vergleich:
Mechanische und elektromagnetische Schwingungen

Eine elastische Schraubenfeder hat die Richtgröße $D = 6{,}5\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

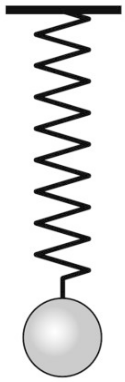

Abb. 1

Eine an diese Feder gehängte Stahlkugel der unbekannten Masse m lässt das entstandene Federpendel (bei kleinen) Auslenkungen mit der Periode $T_m = 0{,}850$ s schwingen.

1. Berechnen Sie die Masse m unter der Annahme, dass das Pendel reibungsfrei schwingt.

2. Ein elektromagnetischer Schwingkreis besteht aus einem Kondensator der Kapazität C = 32,0 µF und einer Spule mit der Induktivität L = 25 H.

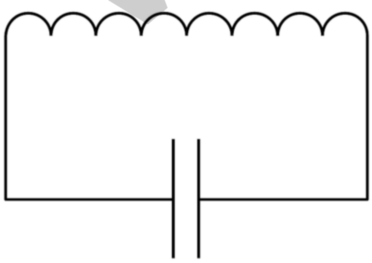

Abb. 2

Ermitteln Sie die Schwingungsdauer T_{el} dieses Schwingkreises.

3. Für die oben genannte Schraubenfeder wünscht man sich eine Masse m_1, sodass die neue Schwingungsdauer T_{m1} der Schwingungsdauer T_{el} des elektromagnetischen Schwingkreises gleicht.
   Berechnen Sie die Masse m_1.

4. Beim schwingenden Federpendel wandeln sich fortlaufend und periodisch wiederkehrend Spannungsenergie der Feder (Elongationsenergie) und kinetische Energie der schwingenden Masse ineinander um.
   Beschreiben Sie diese Umwandlung ausführlich für eine Periode und fertigen Sie entsprechende Skizzen an.
   Hinweis: Hierbei handelt es sich um eine vereinfachte Darstellung. Die Feder wird durch das Anhängen der Masse (und – um ganz genau zu sein – auch ihr Eigengewicht) bereits leicht gespannt. Für die Betrachtung der eigentlichen Schwingung ist dies jedoch nicht relevant, da sich lediglich der Ruhepunkt verschiebt.

5. Beim elektromagnetischen Schwingkreis findet ebenfalls eine periodische Umwandlung zweier Energien ineinander statt:
   Es handelt sich um die elektrische Feldenergie des Kondensators und die magnetische Feldenergie der Spule.
   Erklären Sie im Einzelnen den folgenden Umwandlungsschritt:
   Das Spulenfeld ist Träger maximaler Energie und der Kondensator ist entladen. Gehen Sie dabei auf die energetischen Vorgänge während der nächsten Viertelperiode ein.

   Tipp: Berücksichtigen Sie die Lenz'sche Regel.

6. Sie werden sicherlich zur Bearbeitung von Aufgabe 2 die sog. Thomson-Formel

   $$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad \text{(i)}$$

   herangezogen haben.
   Reproduzieren Sie die Herleitung ohne weitere Hilfestellung, sollten Sie bereits mit dieser vertraut sein.
   Falls dies nicht der Fall ist, arbeiten wir jetzt an einer Begründung dieser Formel und starten den folgenden Gedankengang:

11. Wir berechnen im Folgenden die Positionen der schwingenden Kugel mit kleiner „Schrittweite“ Δt näherungsweise. Während eines Zeitschrittes Δt sehen wir die Bewegung als gleichförmig an mit der Gleichung:

$$s_{i+1} = s_i + v_i \cdot \Delta t \text{ , } i = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(vi)}$$

Um die „neue“ Position s_{i+1} zu finden, benötigt man also die „alte“ Position s_i und die Geschwindigkeit v_i in dieser Position.
Wir verwenden den folgenden Ansatz:

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \Delta v \qquad \text{(vii)}$$

Offenbar wächst v um Δv während eines „Zeitschrittes“ Δt.
Nach Newtons Grundgesetz der Mechanik gilt für die wirksame Kraft:

$$F = m \cdot a(t) = m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ (für kleine t)} \qquad \text{(viii)}$$

Wenn man jetzt die Kraft F (mit den Komponenten: beschleunigende Kraft der Feder und bremsende Reibungskraft) notiert, erhält man nach (viii) eine Gleichung für Δv in Abhängigkeit von Δt.
Damit lässt sich die Geschwindigkeit v_{i+1} aus v_i berechnen.

Starten Sie jetzt Ihren Rechner.
Wählen Sie als Anfangsposition der Kugel $s_0 = -0{,}08 \text{ m}$ (maximale Auslenkung). Die Kugel schwingt in Richtung der positiven s-Achse.

Berechnen Sie nach dem oben beschriebenen Näherungsverfahren die Kugelpositionen s_i mit der zeitlichen Schrittweite $\Delta t = 0{,}001$ s.
Bestimmen Sie die Positionen auf fünf Nachkommastellen genau.
Ermitteln Sie auf diese Weise die drei ersten Amplituden (maximalen positiven Elongationen) des Pendels sowie die Zeiten t_i (i = 1, 2, 3), zu denen sie erreicht werden.
Bestimmen Sie aus diesen Daten den Mittelwert der Periode T_2 der Schwingung als

$$T_2 = \frac{(t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)}{2}$$

Berechnen Sie auch die relative Änderung $\frac{|T_m - T_2|}{T_2}$ in % und vergleichen Sie schließlich mit dem entsprechenden Ergebnis aus Aufgabe 9.

$$m_1 = \frac{T_{el}^{\,2}\, D}{4\,\pi^2} = \frac{(0{,}178\,s)^2 \cdot 6{,}5\,\frac{N}{m}}{4\,\pi^2} \approx 0{,}005\ kg = 5\ g\ .$$

4. Zu Beginn wird die hängende Masse um eine Strecke (maximale Elongation) s_{max} nach unten ausgelenkt. Damit erhält die Feder weitere Spannungsenergie. Gibt man die ausgelenkte Masse (vorsichtig) frei, so beginnt die Federschwingung zur Zeit t = 0.

   Die Feder entspannt sich und beschleunigt die Masse nach oben mit der sogenannten Rückstellkraft. Die anhängende Masse erhält also kinetische Energie, während die Feder Spannungsenergie verliert.

   Hat die Feder wieder ihre alte Ruhe- bzw. Gleichgewichtslage zur Zeit t = T/4 eingenommen, besitzt die Masse maximale kinetische Energie. Die momentane Elongation ist s = 0.

   Infolge von Trägheit schwingt die Masse weiter in die Höhe; dabei drückt sie die Feder zusammen, sodass diese wieder Spannungsenergie erhält, während die Masse abgebremst wird, also an kinetischer Energie verliert.

   Wenn die Masse keine kinetische Energie mehr besitzt, hat die Feder maximale Spannungsenergie erhalten. Das ist der Fall zur Zeit t = T/2. Jetzt entspannt sich die Feder erneut und beschleunigt die anhängende Masse dieses Mal nach unten.

   In der Ruhe- bzw. Gleichgewichtslage der Feder ist s = 0; die Masse hat jetzt wieder maximale kinetische Energie. Das ist die Situation zur Zeit t = 3/4 T.

   Die Masse schwingt jedoch noch weiter nach unten, wird dabei abgebremst, bis sie schließlich ihre tiefste Position erreicht. Zu dieser Zeit t = T hat sie keine kinetische Energie mehr, aber die Feder besitzt wieder maximale Spannungsenergie. Ab jetzt wiederholt sich der Vorgang periodisch.

   In den Umkehrpunkten der Bewegung der Masse ist ihre kinetische Energie Null; beim Durchgang durch die Ruhe- bzw. Gleichgewichtslage der Feder ist ihre kinetische Energie maximal.

   Bei der Feder ist es genau umgekehrt: in den Umkehrpunkten hat sie maximale Spannungsenergie und wenn die Masse maximale kinetische Energie besitzt, hat sie selber keine Spannungsenergie.