Lebendgewicht und Lebenserwartung – Von Informationen und Modellen	6.1

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Wo Mathematik in Bezug auf unsere Welt verwendet wird, hantiert man in der Regel mit Modellen. Die Schüler erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*
- *Sie erkennen: Wo mit Modellen hantiert wird, verwechselt man immer mal wieder Voraussetzungen und Folgerungen. Sie erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*
- *Sie erkennen: Wer die Reichweite der Mathematik zeigen will, muss die Grenzen der Mathematik zeigen. Sie erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*

Zentrales Anliegen:

Die Funktionenlehre der Sekundarstufe I schränkt sich auf eine algebraische Sicht ein. Dadurch wird die Behandlung sowohl hinsichtlich der **Mathematik** als auch hinsichtlich des **Weltbezugs** platt. Die Funktionenlehre hat ein eigenständiges unterrichtliches Potenzial und sie verdient eine **eigenständige Unterrichtskonzeption**. Hier ist ein Fall, den man in dieser Hinsicht aufgreifen kann.

Einordnung:

Funktionenlehre der Mittelstufe: Verständiger Umgang mit und Verwendung von quadratischen Funktionen.

Vorwissen:
- Funktionen verschiedener Art
- Darstellung von Funktionen durch Text, Wertetabelle, Graph, Term, ...
- die allgemeine Form der quadratischen Funktionsterme und die Scheitelpunktform
- elementare Teile der beschreibenden Statistik

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Eine Information in einem Lehrbuch
2. Schritt: Wo die Funktion f herkommt
3. Schritt: Eine Aufgabe für den Mathematikunterricht

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Eine Information in einem Lehrbuch

Im ersten Teil wird eine Information in einem Lehrbuch zum Anlass genommen, sich dem Zusammenhang von Körpergewicht und Lebenserwartung zu widmen. Die Information ist in Form einer quadratischen Funktion gefasst und so wird diese quadratische Funktion untersucht. Die Ergebnisse sind nennenswert. Doch dann stellt sich die Frage „Woher kommt dieses f?".

Eine Information

1 In irgendeinem Lehrbuch steht:

„Die Lebenserwartung errechnet sich nach

$f(x) = 105 - 1/20\,(x + 10)^2$ im Bereich $-20 \le x \le 30$,

wobei x % das Übergewicht und f(x) % die Lebenserwartung angeben.

Dabei ist (nach P. Broca, 1828-1880) die Maßzahl des **Normalgewichts** (in kg) gleich der Maßzahl der Körperlänge (in cm) minus 100."

2 Was steht da? Steht da etwas für uns?
Die Begriffe „Übergewicht" und „Lebenserwartung" sind zu erörtern, zu problematisieren, zu klären. Dafür braucht man ihre Verknüpfung mit Ernährung, Lebensführung und Gesundheit. Im Begriff „Übergewicht" steckt eine Rede von Normal-, Ideal-, Soll- ...-gewicht.
Was meint diese Rede? – Wir versuchen an dieser Stelle nicht, das ganze Problem aufzudröseln. Wir beschränken uns darauf, zum Ersten, die bekannten und gängigen Worthülsen nur anzutippen. Etwa die verschiedenen Aspekte, die mit diesen Wortprägungen betont werden. Zum Zweiten tippen wir auch die Frage nur an, ob eine Empfehlung einer Gewichtsformel für alle überhaupt möglich sein kann. Und zum Dritten tippen wir nur an, ob es nicht eher irreführend ist, wenn man die Lebenserwartung an eine einzige Größe anbindet und dann auch noch an eine billige quantitative Größe.

Nein, das Lebensende, als Abschied von einem erfüllten Leben, haben 15- oder 17-Jährige nicht im Blick und nicht einmal im Kopf. Es wäre auch vergebliche Mühe, das an dieser Stelle erreichen zu wollen. Eher wird über „die letzten Dinge" gealbert. Da nutzt, wie immer, Predigen gar nichts. Aber das legt sich im Lauf der Arbeit.

Zur Wertetabelle

3 Wie sieht der Zusammenhang von Lebenserwartung und Übergewicht – in der vorgefundenen Fassung – aus?
Machen wir es uns leichter; machen wir es uns anschaulich: Malen wir ein Bild. Dafür brauchen wir eine **Wertetabelle**. Wie immer überlegen wir, bevor wir zum Taschenrechner greifen:

- Von wo bis wo berechnen wir Funktionswerte?
- In welchen Abständen berechnen wir Funktionswerte?

x	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
f(x)	85	100	105	100	85	60	25	-20

Unterrichtsplanung

Der Graph

6 Wir wollten ein Bild malen. Tun wir das. Wie immer überlegen wir, bevor wir zum Zeichenwerkzeug greifen, wohin wir die Koordinatenachsen legen und wie wir sie skalieren (Größen, Einheiten; s. **M1**).

7 Unsere **Wertetabelle** und unser **Graph** (**M1**) suggerieren, dass die Lebenserwartung bei 10 % unter Broca ihren Maximalwert annimmt, 105 % (der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht).

Ist (–10; 105) der Maximalpunkt von f? Ist 105 % der Maximalwert der Lebenserwartung?
Wie eben (Transfer): Das können wir aus der Graphik nicht entnehmen und aus der Wertetabelle auch nicht. Und wieder wie eben: Aber aus dem Funktionsterm!
Der Funktionsterm ist uns in der Scheitelpunktform gegeben. Wir können – Ja, können wir! Haben wir gelernt! – unmittelbar ablesen: (–10; 105) ist der Scheitelpunkt unserer Parabel. Also ist 105 % (der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht) die maximale Lebenserwartung, und zwar bei 10 % unterhalb des Broca-Gewichts.
Es bleibt dabei: Die Rede von Unter- oder Übergewicht im Sinne von Broca ist irreführend.

Unser Ergebnis

8 Was haben wir herausbekommen? Was wissen wir nun (neu)? Wir wissen nun:

a) Es gibt ein Gewicht, das die Lebenserwartung maximal macht. Bei 10 % unter Broca-Gewicht ist die Lebenserwartung 5 % über der bei Broca-Gewicht.
b) Es gibt einen Gewichtsbereich, in dem die Lebenserwartung größer ist als beim Broca-Gewicht. Zwischen Broca und 20 % darunter ist die Lebenserwartung größer als 100 %.
c) Außerhalb dieses Gewichtsbereichs wird die Lebenserwartung kleiner als 100 %, und zwar überraschend schnell.

Das sind die Einzelheiten. Was sagen sie uns insgesamt? Wir können uns den Überblick erleichtern, indem wir etwa so zusammenfassen:

Satz:
Wir können unsere größte Lebenserwartung dadurch erreichen, dass wir unser Gewicht unter dem Broca-Gewicht halten, und zwar um 10 %.
So wird unsere Lebenserwartung um 5 % größer als bei Broca-Gewicht.
Von viel kleinerem Gewicht und von viel größerem Gewicht sollten wir die Finger lassen.

9 Das haben wir herausbekommen, und zwar aus f. Wir haben f untersucht und sind so zu dieser Einsicht gekommen. „Steht da etwas für uns?“, hatten wir gefragt. Steht da etwas für uns? Da brauchen wir nicht lange hin und her reden; da können wir uns einigen. Auch wenn das Ergebnis vielleicht unbequem ist.

allgemein zu formulierenden) Aktionen veranschaulichen wir uns und entwickeln wir selbstverständlich an mehreren Beispielen:

a) Für eine Person, deren Gewicht 60 kg ist und ihr Broca-Gewicht 50 kg, wird
x % = (60 kg – 50 kg) / 50 kg · 100 % = 10 kg / 50 kg · 100 % = 1/5 · 100 % = 20 %.
Für eine Person mit Gewicht 70 kg und Broca-Gewicht 70 kg wird
x % = (70 kg – 70 kg) / 70 kg · 100 % = 0 %.
x = 0 heißt also (der Umkehrbarkeit wegen und weil ...): Die Person hatte tatsächlich Broca-Gewicht.

b) Für ein Gewicht 20 % über dem Broca-Gewicht errechnet f die Lebenserwartung zu 60 % der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht.
Für das Broca-Gewicht errechnet f die Lebenserwartung zu 100 %.

3 Und wieder hoppla! Jetzt sehen wir, wie das Broca-Gewicht zu den hervorstechenden 100 % kommt! Das ist also keine Besonderheit aus der Broca-Eigenschaft, sondern allein aus unserer rechnerischen Darstellung: Dass f(0) = 100, sagt nicht mehr, als dass wir eben das Verhältnis der Lebenserwartung (bei einem gewissen Gewicht) zur Lebenserwartung bei Broca-Gewicht (multipliziert mit 100) berechnen (lassen). Die 100 % sind nichts, was das Broca-Gewicht inhaltlich auszeichnet; nichts, was für die Normalität oder Ähnliches des Broca-Gewichts spricht. Salopp gesagt: Die 100 % sind ein Skalierungseffekt, nichts sonst.

Noch ein Satz liegt uns auf der Zunge: „Die 100 % der Lebenserwartung gehören zum Broca-Gewicht!“ Ich bin dankbar, wenn das laut gesagt wird. Wie mancher andere Fehler auch, ***gibt*** dieser hier etwas, nämlich den Anlass, einen wichtigen Punkt noch einmal (kurz) aufzugreifen und zu festigen: Bei einer Funktion gehört zu jedem x ein einziges f(x); ein Funktionswert (ein „f(x)“) kann aber zu verschiedenen x gehören.

Ein Bild

4 Den so strukturierten Datenberg möchten wir uns erst einmal in einem Bild veranschaulichen. Wie schaut die zugehörige Punktwolke aus? Wir ließen sie uns zeichnen – wenn wir die Daten hätten. Die haben wir aber nicht. Sind wir also am Ende? Woher nehmen und nicht stehlen? Selber machen, was sonst! Fragezeichen. Wir können es jedenfalls versuchen:

5 Wir versuchen, ein passendes Bild selber herzustellen. Wie kann die Punktwolke ausgesehen haben? Was wissen wir von dieser Punktwolke? Wir wissen: Die Medizin-Mathematiker haben die Punktwolke zu f verarbeitet. Falls sie gepfuscht haben, wissen wir aus f über die Punktwolke gar nichts. Falls sie anständig gearbeitet haben, wissen wir, dass f halbwegs zur Punktwolke passt. Und dass also die Punktwolke halbwegs zu f passt. Das heißt nicht mehr als: Die Punktwolke ist so, dass f halbwegs dazu passt. Wollen wir annehmen, dass die Medizin-Mathematiker anständig gearbeitet haben? Oder nicht? Wir haben (bisher) keinen Hinweis auf Pfusch. (Vielleicht die f-Punkte (20; 60) und (30; 25)? Die behalten wir im Hinterkopf.) Deswegen setzen wir erst einmal an mit der

Unterstellung:
Die Medizin-Mathematiker haben anständig gearbeitet.

Diese Unterstellung gilt (lassen wir gelten) bis zu Hinweisen auf das Gegenteil. Mit dieser Unterstellung gehen wir, von hier an, von folgenden Aussagen aus:

Unterrichtsplanung

So kann das gewesen sein; so muss das, im Prinzip, gewesen sein.
Wie kamen die Medizin-Mathematiker zu diesem Scheitelpunkt? Dafür gibt es – verschiedene – Verfahren. Sie haben z.B. mit Mittelung zu tun, mit der Berechnung von Mittelwerten, und mit der Berechnung von (Summen von) Abstandsquadraten. Darum müssen wir uns nicht kümmern. Zwei Aspekte sollten wir aber im Blick behalten: Zum einen ist die Ermittlung eines Punktes aus einer Punktwolke sozusagen eine ***Verdichtung*** der Punktwolke. Zum anderen ist die Existenz eines (einzigen) Scheitelpunktes durch die Entscheidung herbeigeführt, die Punktwolke durch eine Parabel erfassen zu wollen.

8 Bleibt nur noch die Frage: Wie machen *wir* weiter?
Wir haben die Vorgehensweise der Medizin-Mathematiker, im Prinzip. Wir können versuchen, es genau so zu tun. Konkurrierende Vorschläge erörtern wir selbstverständlich.
„Genau so“ – was also haben wir zu tun? Wo stehen wir, wie machen wir weiter? Wir stehen vor dem dritten Schritt: Wir haben die Punktwolke(n); jetzt kommt der Schritt 3 – Moment! Wir sind erst fast fertig mit unseren Bildern. Alle unsere schönen Bilder haben noch einen Fehler: In allen unseren Bildern ist die Parabel zu f. Die ist, mittlerweile, in diesem Bild fehl am Platz. Wir wollen die Punktwolke, von der aus die Medizin-Mathematiker angesetzt haben. Die Parabel kommt erst noch, bisher haben die Medizin-Mathematiker nur die Punktwolke. Also müssen wir erstmal die Parabel wegoperieren. Tun wir das.

So, nun haben wir die **Punktwolke** (**M3**), wie sie – so ungefähr und bis auf die größere Anzahl – auch die Medizin-Mathematiker vor sich hatten. Nun sind wir am (bildlichen) Ausgangspunkt der Funktionsermittlung im engeren Sinn. Jetzt kommt der Schritt 3:

Zur Form der Kurve

9 Was macht der Schritt 3? Schritt 3 führt noch nicht zu genau der Parabel (zu f), sondern erst einmal zur Form der Kurve als einer nach unten geöffneten Parabel. Diesen Schritt wollen wir jetzt tun. Woher nehmen wir die Form „nach unten geöffnete Parabel“? Hatten wir eben gesagt „... hat man abgelesen“? Dann bitteschön – dann lest mal ab!
Ich lasse mehrere Parabeln in die Folie (die auf dem Tageslichtprojektor liegt) zeichnen und in jedes Heft und jede der anderen vorgeschlagenen Kurven auch.

„So? Oder so? Oder so? Warum eigentlich Parabel? Warum nicht einen Sägezahn? Oder doch lieber eine halbe Sinusschwingung? Passt nicht eine Glockenkurve besser? Warum eigentlich nicht doch eine schicke Schlangenlinie? Oder ... ?“
So langsam dämmert uns: Von wegen „ablesen“. In der Punktwolke steckt nicht eine Kurve, die wir bloß abzulesen brauchten. Wir können nur eines tun: Wir können eine Kurve in die Punktwolke **hineinsehen**. Und noch einmal nein: nicht „eine Kurve“. Wir können viele Kurven hineinsehen; wir haben da eine erkleckliche Auswahl. „Die Parabel kommt noch“ hatten wir irgendwann gesagt. Sie selber und ganz von allein? Nein, so ist das nicht. Die Parabel kommt nicht aus der Punktwolke heraus. Sie steckt da nicht drinnen; also kann sie da auch nicht herauskommen. Und niemand kann sie herauskommen lassen.

Wie kommen wir zur Form einer nach unten geöffneten Parabel? Wir überlegen, was wir wollen; und wir überlegen, was die Medizin-Mathematiker wollten. Die wollten eine einfache Kurve, die einen einfachen Zusammenhang zwischen Gewicht und Lebenserwartung unmittelbar aufzufassen ermöglicht. Eine Schlangenlinie taugt dafür nicht. Eine „Faustkurve“ (analog zur Faustregel) lässt zwar viele Details der Punktwolke außer Acht; aber genau dadurch bringt sie Übersicht und Überblick. Daraufhin schauen wir unsere verschiedenen Vorschläge noch einmal an, und dann können wir uns einigen. Etwa so:

Vorüberlegungen

Ziele und Inhalte:

- *Wo Mathematik in Bezug auf unsere Welt verwendet wird, hantiert man in der Regel mit Modellen. Die Schüler erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*
- *Sie erkennen: Wo mit Modellen hantiert wird, verwechselt man immer mal wieder Voraussetzungen und Folgerungen. Sie erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*
- *Sie erkennen: Wer die Reichweite der Mathematik zeigen will, muss die Grenzen der Mathematik zeigen. Sie erfahren das beispielhaft am vorliegenden Fall.*

Zentrales Anliegen:

Die Funktionenlehre der Sekundarstufe I schränkt sich auf eine algebraische Sicht ein. Dadurch wird die Behandlung sowohl hinsichtlich der **Mathematik** als auch hinsichtlich des **Weltbezugs** platt. Die Funktionenlehre hat ein eigenständiges unterrichtliches Potenzial und sie verdient eine **eigenständige Unterrichtskonzeption**. Hier ist ein Fall, den man in dieser Hinsicht aufgreifen kann.

Einordnung:

Funktionenlehre der Mittelstufe: Verständiger Umgang mit und Verwendung von quadratischen Funktionen.

Vorwissen:
- Funktionen verschiedener Art
- Darstellung von Funktionen durch Text, Wertetabelle, Graph, Term, ...
- die allgemeine Form der quadratischen Funktionsterme und die Scheitelpunktform
- elementare Teile der beschreibenden Statistik

Die einzelnen Unterrichtsschritte im Überblick:

1. Schritt: Eine Information in einem Lehrbuch
2. Schritt: Wo die Funktion f herkommt
3. Schritt: Eine Aufgabe für den Mathematikunterricht

Unterrichtsplanung

1. Schritt: Eine Information in einem Lehrbuch

Im ersten Teil wird eine Information in einem Lehrbuch zum Anlass genommen, sich dem Zusammenhang von Körpergewicht und Lebenserwartung zu widmen. Die Information ist in Form einer quadratischen Funktion gefasst und so wird diese quadratische Funktion untersucht. Die Ergebnisse sind nennenswert. Doch dann stellt sich die Frage „Woher kommt dieses f?“.

Eine Information

1 In irgendeinem Lehrbuch steht:

„Die Lebenserwartung errechnet sich nach

$f(x) = 105 – 1/20\ (x + 10)^2$ im Bereich $–20 \leq x \leq 30$,

wobei x % das Übergewicht und f(x) % die Lebenserwartung angeben.

Dabei ist (nach P. Broca, 1828-1880) die Maßzahl des **Normalgewichts** (in kg) gleich der Maßzahl der Körperlänge (in cm) minus 100.“

2 Was steht da? Steht da etwas für uns?
Die Begriffe „Übergewicht“ und „Lebenserwartung“ sind zu erörtern, zu problematisieren, zu klären. Dafür braucht man ihre Verknüpfung mit Ernährung, Lebensführung und Gesundheit. Im Begriff „Übergewicht“ steckt eine Rede von Normal-, Ideal-, Soll- ...-gewicht.
Was meint diese Rede? – Wir versuchen an dieser Stelle nicht, das ganze Problem aufzudröseln. Wir beschränken uns darauf, zum Ersten, die bekannten und gängigen Worthülsen nur anzutippen. Etwa die verschiedenen Aspekte, die mit diesen Wortprägungen betont werden. Zum Zweiten tippen wir auch die Frage nur an, ob eine Empfehlung einer Gewichtsformel für alle überhaupt möglich sein kann. Und zum Dritten tippen wir nur an, ob es nicht eher irreführend ist, wenn man die Lebenserwartung an eine einzige Größe anbindet und dann auch noch an eine billige quantitative Größe.

Nein, das Lebensende, als Abschied von einem erfüllten Leben, haben 15- oder 17-Jährige nicht im Blick und nicht einmal im Kopf. Es wäre auch vergebliche Mühe, das an dieser Stelle erreichen zu wollen. Eher wird über „die letzten Dinge“ gealbert. Da nutzt, wie immer, Predigen gar nichts. Aber das legt sich im Lauf der Arbeit.

Zur Wertetabelle

3 Wie sieht der Zusammenhang von Lebenserwartung und Übergewicht – in der vorgefundenen Fassung – aus?
Machen wir es uns leichter; machen wir es uns anschaulich: Malen wir ein Bild. Dafür brauchen wir eine **Wertetabelle**. Wie immer überlegen wir, bevor wir zum Taschenrechner greifen:

- Von wo bis wo berechnen wir Funktionswerte?
- In welchen Abständen berechnen wir Funktionswerte?

x	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
f(x)	85	100	105	100	85	60	25	-20

Der Graph

6 Wir wollten ein Bild malen. Tun wir das. Wie immer überlegen wir, bevor wir zum Zeichenwerkzeug greifen, wohin wir die Koordinatenachsen legen und wie wir sie skalieren (Größen, Einheiten; s. **M1**).

7 Unsere **Wertetabelle** und unser **Graph** (**M1**) suggerieren, dass die Lebenserwartung bei 10 % unter Broca ihren Maximalwert annimmt, 105 % (der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht).

Ist (–10; 105) der Maximalpunkt von f? Ist 105 % der Maximalwert der Lebenserwartung?
Wie eben (Transfer): Das können wir aus der Graphik nicht entnehmen und aus der Wertetabelle auch nicht. Und wieder wie eben: Aber aus dem Funktionsterm!
Der Funktionsterm ist uns in der Scheitelpunktform gegeben. Wir können – Ja, können wir! Haben wir gelernt! – unmittelbar ablesen: (–10; 105) ist der Scheitelpunkt unserer Parabel. Also ist 105 % (der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht) die maximale Lebenserwartung, und zwar bei 10 % unterhalb des Broca-Gewichts.
Es bleibt dabei: Die Rede von Unter- oder Übergewicht im Sinne von Broca ist irreführend.

Unser Ergebnis

8 Was haben wir herausbekommen? Was wissen wir nun (neu)? Wir wissen nun:

a) Es gibt ein Gewicht, das die Lebenserwartung maximal macht. Bei 10 % unter Broca-Gewicht ist die Lebenserwartung 5 % über der bei Broca-Gewicht.
b) Es gibt einen Gewichtsbereich, in dem die Lebenserwartung größer ist als beim Broca-Gewicht. Zwischen Broca und 20 % darunter ist die Lebenserwartung größer als 100 %.
c) Außerhalb dieses Gewichtsbereichs wird die Lebenserwartung kleiner als 100 %, und zwar überraschend schnell.

Das sind die Einzelheiten. Was sagen sie uns insgesamt? Wir können uns den Überblick erleichtern, indem wir etwa so zusammenfassen:

Satz:
Wir können unsere größte Lebenserwartung dadurch erreichen, dass wir unser Gewicht unter dem Broca-Gewicht halten, und zwar um 10 %.
So wird unsere Lebenserwartung um 5 % größer als bei Broca-Gewicht.
Von viel kleinerem Gewicht und von viel größerem Gewicht sollten wir die Finger lassen.

9 Das haben wir herausbekommen, und zwar aus f. Wir haben f untersucht und sind so zu dieser Einsicht gekommen. „Steht da etwas für uns?“, hatten wir gefragt. Steht da etwas für uns? Da brauchen wir nicht lange hin und her reden; da können wir uns einigen. Auch wenn das Ergebnis vielleicht unbequem ist.

allgemein zu formulierenden) Aktionen veranschaulichen wir uns und entwickeln wir selbstverständlich an mehreren Beispielen:

a) Für eine Person, deren Gewicht 60 kg ist und ihr Broca-Gewicht 50 kg, wird
x % = (60 kg – 50 kg) / 50 kg · 100 % = 10 kg / 50 kg · 100 % = 1/5 · 100 % = 20 %.
Für eine Person mit Gewicht 70 kg und Broca-Gewicht 70 kg wird
x % = (70 kg – 70 kg) / 70 kg · 100 % = 0 %.
$x = 0$ heißt also (der Umkehrbarkeit wegen und weil ...): Die Person hatte tatsächlich Broca-Gewicht.

b) Für ein Gewicht 20 % über dem Broca-Gewicht errechnet f die Lebenserwartung zu 60 % der Lebenserwartung bei Broca-Gewicht.
Für das Broca-Gewicht errechnet f die Lebenserwartung zu 100 %.

3 Und wieder hoppla! Jetzt sehen wir, wie das Broca-Gewicht zu den hervorstechenden 100 % kommt! Das ist also keine Besonderheit aus der Broca-Eigenschaft, sondern allein aus unserer rechnerischen Darstellung: Dass $f(0) = 100$, sagt nicht mehr, als dass wir eben das Verhältnis der Lebenserwartung (bei einem gewissen Gewicht) zur Lebenserwartung bei Broca-Gewicht (multipliziert mit 100) berechnen (lassen). Die 100 % sind nichts, was das Broca-Gewicht inhaltlich auszeichnet; nichts, was für die Normalität oder Ähnliches des Broca-Gewichts spricht. Salopp gesagt: Die 100 % sind ein Skalierungseffekt, nichts sonst.

Noch ein Satz liegt uns auf der Zunge: „Die 100 % der Lebenserwartung gehören zum Broca-Gewicht!“ Ich bin dankbar, wenn das laut gesagt wird. Wie mancher andere Fehler auch, ***gibt*** dieser hier etwas, nämlich den Anlass, einen wichtigen Punkt noch einmal (kurz) aufzugreifen und zu festigen: Bei einer Funktion gehört zu jedem x ein einziges f(x); ein Funktionswert (ein „f(x)“) kann aber zu verschiedenen x gehören.

Ein Bild

4 Den so strukturierten Datenberg möchten wir uns erst einmal in einem Bild veranschaulichen. Wie schaut die zugehörige Punktwolke aus? Wir ließen sie uns zeichnen – wenn wir die Daten hätten. Die haben wir aber nicht. Sind wir also am Ende? Woher nehmen und nicht stehlen? Selber machen, was sonst! Fragezeichen. Wir können es jedenfalls versuchen:

5 Wir versuchen, ein passendes Bild selber herzustellen. Wie kann die Punktwolke ausgesehen haben? Was wissen wir von dieser Punktwolke? Wir wissen: Die Medizin-Mathematiker haben die Punktwolke zu f verarbeitet. Falls sie gepfuscht haben, wissen wir aus f über die Punktwolke gar nichts. Falls sie anständig gearbeitet haben, wissen wir, dass f halbwegs zur Punktwolke passt. Und dass also die Punktwolke halbwegs zu f passt. Das heißt nicht mehr als: Die Punktwolke ist so, dass f halbwegs dazu passt. Wollen wir annehmen, dass die Medizin-Mathematiker anständig gearbeitet haben? Oder nicht? Wir haben (bisher) keinen Hinweis auf Pfusch. (Vielleicht die f-Punkte (20; 60) und (30; 25)? Die behalten wir im Hinterkopf.) Deswegen setzen wir erst einmal an mit der

> **Unterstellung:**
> Die Medizin-Mathematiker haben anständig gearbeitet.

Diese Unterstellung gilt (lassen wir gelten) bis zu Hinweisen auf das Gegenteil. Mit dieser Unterstellung gehen wir, von hier an, von folgenden Aussagen aus:

Unterrichtsplanung

So kann das gewesen sein; so muss das, im Prinzip, gewesen sein.
Wie kamen die Medizin-Mathematiker zu diesem Scheitelpunkt? Dafür gibt es – verschiedene – Verfahren. Sie haben z.B. mit Mittelung zu tun, mit der Berechnung von Mittelwerten, und mit der Berechnung von (Summen von) Abstandsquadraten. Darum müssen wir uns nicht kümmern. Zwei Aspekte sollten wir aber im Blick behalten: Zum einen ist die Ermittlung eines Punktes aus einer Punktwolke sozusagen eine ***Verdichtung*** der Punktwolke. Zum anderen ist die Existenz eines (einzigen) Scheitelpunktes durch die Entscheidung herbeigeführt, die Punktwolke durch eine Parabel erfassen zu wollen.

8 Bleibt nur noch die Frage: Wie machen *wir* weiter?
Wir haben die Vorgehensweise der Medizin-Mathematiker, im Prinzip. Wir können versuchen, es genau so zu tun. Konkurrierende Vorschläge erörtern wir selbstverständlich.
„Genau so" – was also haben wir zu tun? Wo stehen wir, wie machen wir weiter? Wir stehen vor dem dritten Schritt: Wir haben die Punktwolke(n); jetzt kommt der Schritt 3 – Moment! Wir sind erst fast fertig mit unseren Bildern. Alle unsere schönen Bilder haben noch einen Fehler: In allen unseren Bildern ist die Parabel zu f. Die ist, mittlerweile, in diesem Bild fehl am Platz. Wir wollen die Punktwolke, von der aus die Medizin-Mathematiker angesetzt haben. Die Parabel kommt erst noch, bisher haben die Medizin-Mathematiker nur die Punktwolke. Also müssen wir erstmal die Parabel wegoperieren. Tun wir das.

So, nun haben wir die **Punktwolke** (**M3**), wie sie – so ungefähr und bis auf die größere Anzahl – auch die Medizin-Mathematiker vor sich hatten. Nun sind wir am (bildlichen) Ausgangspunkt der Funktionsermittlung im engeren Sinn. Jetzt kommt der Schritt 3:

Zur Form der Kurve

9 Was macht der Schritt 3? Schritt 3 führt noch nicht zu genau der Parabel (zu f), sondern erst einmal zur Form der Kurve als einer nach unten geöffneten Parabel. Diesen Schritt wollen wir jetzt tun. Woher nehmen wir die Form „nach unten geöffnete Parabel"? Hatten wir eben gesagt „... hat man abgelesen"? Dann bitteschön – dann lest mal ab!
Ich lasse mehrere Parabeln in die Folie (die auf dem Tageslichtprojektor liegt) zeichnen und in jedes Heft und jede der anderen vorgeschlagenen Kurven auch.

„So? Oder so? Oder so? Warum eigentlich Parabel? Warum nicht einen Sägezahn? Oder doch lieber eine halbe Sinusschwingung? Passt nicht eine Glockenkurve besser? Warum eigentlich nicht doch eine schicke Schlangenlinie? Oder ... ?"
So langsam dämmert uns: Von wegen „ablesen". In der Punktwolke steckt nicht eine Kurve, die wir bloß abzulesen brauchten. Wir können nur eines tun: Wir können eine Kurve in die Punktwolke **hineinsehen**. Und noch einmal nein: nicht „eine Kurve". Wir können viele Kurven hineinsehen; wir haben da eine erkleckliche Auswahl. „Die Parabel kommt noch" hatten wir irgendwann gesagt. Sie selber und ganz von allein? Nein, so ist das nicht. Die Parabel kommt nicht aus der Punktwolke heraus. Sie steckt da nicht drinnen; also kann sie da auch nicht herauskommen. Und niemand kann sie herauskommen lassen.

Wie kommen wir zur Form einer nach unten geöffneten Parabel? Wir überlegen, was wir wollen; und wir überlegen, was die Medizin-Mathematiker wollten. Die wollten eine einfache Kurve, die einen einfachen Zusammenhang zwischen Gewicht und Lebenserwartung unmittelbar aufzufassen ermöglicht. Eine Schlangenlinie taugt dafür nicht. Eine „Faustkurve" (analog zur Faustregel) lässt zwar viele Details der Punktwolke außer Acht; aber genau dadurch bringt sie Übersicht und Überblick. Daraufhin schauen wir unsere verschiedenen Vorschläge noch einmal an, und dann können wir uns einigen. Etwa so:

Unterrichtsplanung

Zum Term

11 Was macht Schritt 5? Schritt 5 führt zu einem Term für die Funktion g. Wir haben Bestimmungen für g; ob sie g vollständig festlegen, ausreichend bestimmen oder ob sie zu viel sind, müssen wir sehen. Versuchen wir erst einmal, wie weit wir kommen. Was haben wir; was brauchen wir noch?
Wir haben bereits eine Form des Terms zu g; das ist (*). Wir brauchen nur noch die drei Koeffizienten von g. Unbekannte kann man – wenn man Glück hat – aus Gleichungen berechnen; wir brauchen also – wenn wir Glück haben nur drei – Gleichungen. Gleichungen kann man aus bekannten Punkten gewinnen; wir kennen Punkte von g, also können wir Gleichungen aufstellen.

Das ist ein Weg, der des Versuches wert ist. Wir können aber auch eleganter vorgehen: Wir nutzen unser Wissen. Und zwar unser Wissen um den Zusammenhang von Scheitelpunkt und Funktionsterm einer quadratischen Funktion. Die allgemeine Form des quadratischen Funktionsterms wie oben (*) ist nicht die einzige mögliche Form. Es gibt auch z.B. die Scheitelpunktform:

$g(x) = a\,(x - d)^2 + e$ (d; e) ist in dieser Schreibweise der Scheitelpunkt der Parabel.

d und e können wir also sofort einsetzen. Das macht uns die Arbeit viel leichter. Wir stehen zu unserer Faulheit – wir setzen mit der Scheitelpunktform an:

$g(x) = a\,(x + 10)^2 + 105$

So haben wir nur noch eine Unbekannte. Für die brauchen wir – wenn es gut läuft – nur eine Gleichung. Zur Erinnerung: Gleichungen sind Aussagen. Also kann man Gleichungen nur aus Aussagen (Informationen) gewinnen. Wir haben noch eine Information, die wir noch nicht verwendet haben, die „Information" in Bestimmung 3:
Bei 0 % über/unter Broca soll die Lebenserwartung 100 % sein. In Symbolen: g(0) != 100.

Wieder gilt: Wir ***bestimmen***, dass g(0) 100 sein soll. Darauf brauchen wir uns aber nicht dauernd aufmerksam machen. Deswegen lassen wir im Weiteren das Ausrufezeichen weg. Und wir setzen ein:

$a \cdot 10^2 + 105 = 100$ $\quad a = -1/20 \quad$ also $\quad g(x) = -1/20\,(x + 10)^2 + 105$

(Die Probe schließen wir, selbstverständlich, an.)
Wir haben einen Funktionsterm zu g – das ist der Schritt 5.

12 Was haben wir jetzt? Jetzt haben wir g so ermittelt, wie es die Medizin-Mathematiker (fast so) mit f getan haben. Wir sind von der strukturierten Punktwolke ausgegangen, haben sie durch eine Parabel gedeutet und haben einen Funktionsterm zu dieser Parabel ermittelt. Wir sehen: Unser Term g(x) ist gleich dem Term f(x).

Damit schließt sich der Kreis. Wir haben uns nicht verdacht und nicht verrechnet. So wie wir das eben gemacht haben, so ist die Funktion f aus dem Lehrbuch zustande gekommen, jedenfalls „im Prinzip". Wenn die Medizin-Mathematiker halbwegs anständig gearbeitet haben.

Können wir uns einigen? Vielleicht so: Das Thema soll im Unterricht aufgegriffen werden.
Wenn nicht, dann ist Schritt 3 hier zu Ende. Wenn ja: Bleibt noch der Ort: Auch im Mathematikunterricht?

- Die Fragen, die der Lehrbuchtext stellt, können nur mit mathematischem Sachverstand beantwortet werden.
- Es ist (wieder) ein Beispiel dafür, wie vielfältig Mathematik in unserer Alltagswelt Verwendung findet.
- ...

Können wir uns einigen? Vielleicht so: Das Thema soll auch im Mathematikunterricht aufgegriffen werden. Wenn nicht, ... Wenn ja:

Unterrichtsvorschläge

Dann mal los: Gute Vorschläge!

Wir wollen uns nicht verzetteln und nicht verquatschen. Aber jeden Vorschlag, der Substanz in Aussicht stellt, schauen wir uns an. Z.B. solche wie diese:

Vorschlag „Lehrbuch“:
Wir nehmen den Text aus dem Lehrbuch und stellen einige Fragen dazu. Z.B.:
- Welches Gewicht bringt die maximale Lebenserwartung?
- Welche Lebenserwartung erreicht man mit dem „Normalgewicht“?
- Gibt es verschiedene Gewichte, mit denen man die maximale Lebenserwartung erreicht?
- Welche Lebenserwartung habe ich mit meinem derzeitigen Gewicht?

Der Anschaulichkeit wegen lassen wir einen Graph zu f zeichnen.

Was spricht für den Vorschlag, was dagegen?

Dafür:

- Man sieht sofort, dass die Sache nicht bloß aus dem Schulbuch kommt, sondern aus der Lebenswelt.
- Die Fragen sind nicht mathematikbornierter Missbrauch der Sache, sondern drängen sich aus der Sache unmittelbar auf.
- Es ist eine überschaubare Aufgabe; es sind keine Risiken versteckt.
- Die Aufgabe hat ein gewohntes Format; erfolgreiche Bearbeitung ist kalkulierbar.
- Die Aufgabe passt in den gewohnten Zeitrahmen.
- ...

Können wir uns einigen? Vielleicht so:

Der Vorschlag „Lehrbuch“ ist eine passgenaue Vorlage für anwendungsorientierten Mathematikunterricht.

Dagegen:

- f fällt vom Himmel.
- Es bleibt im Dunkel, dass f hergestellt ist.

6.1	Lebendgewicht und Lebenserwartung – Von Informationen und Modellen
M2	Arbeitsblatt 2

Graphik 2