

Reihe 11 S 1	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Ich kann's begründen! – Mathematisch argumentieren am Beispiel der binomischen Formeln

Tobias Jaschke, Uhingen



Nicht nur Detektive brauchen stichhaltige Beweise. Auch in der Mathematik spielt das Begründen mit Beispielen und das Beweisen mathematischer Sätze eine wichtige Rolle.

Bilder: 1. Thinkstock; 2+3: Julia Lenzmann

I/F

Klasse: 8
Dauer: 4–10 Stunden, je nach Materialauswahl
Inhalt: bildliches, algebraisches und kontextorientiertes Begründen, über Beispiele argumentieren, Termumformungen, binomische Formeln
Ihr Plus: alternative Arbeitsblätter zur Differenzierung (CD-ROM 68), Raster zum Erstellen eigener Memoblätter (M 11 und M 12), Checkliste zur Selbsteinschätzung (CD-ROM 68)

Warum ist das so? Dies fragen vor allem kleine Kinder.

In diesem Beitrag setzen sich Ihre Schüler mit verschiedenen Möglichkeiten auseinander, Aussagen zu begründen – mit Beispielen, mit grafischen Überlegungen und auch mit Termumformungen. Sie entdecken Fehler in Rechnungen und werden schließlich an einfache mathematische Beweise herangeführt. Eine Lernerfolgskontrolle rundet die Unterrichtseinheit ab.

Reihe 11 S 2	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Didaktisch-methodische Hinweise

Argumentieren – was ist das eigentlich?

Argumentieren ist der Versuch, eine andere Person oder sich selbst von einer Annahme, einem Lösungsweg, einer Erläuterung oder einer Vermutung zu überzeugen. Je mehr dabei die vorgebrachten Argumente stimmig und nachvollziehbar und je mehr sie an den Kriterien der Rationalität festzumachen sind, desto überzeugender sind sie. Im schulisch-mathematischen Rahmen bedeutet dies, dass eine Argumentation dann als schlüssig und überzeugend anerkannt wird, wenn sie in ihrer allgemeinen Gültigkeit klar wird und sich bei den Lernenden die Erkenntnis einstellt, dass weitere Beispiele und Diskussionen keine neuen Erkenntnisse bringen werden.

Argumentieren im Mathematikunterricht – Vorbehalte und Chancen

Nach den Vorstellungen der Kultusministerkonferenz (KMK) sollen Argumentationsprozesse immanenter Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. Und natürlich ist Argumentieren im Mathematikunterricht nichts gänzlich Neues. Schon immer wurden die Lernenden im Zuge von Lernprozessen aufgefordert, ihre Meinung zu vertreten und schlüssige Gründe für ihre Aussagen anzugeben. Neu ist, dass diese Argumentationsprozesse explizit als inhaltsübergreifende Kompetenzen formuliert sind und daher bei der Unterrichtsplanung bewusst mit bedacht werden müssen. Sie werden dadurch wesentlich verbindlicher und verlangen von uns Mathematiklehrern eine tiefer gehende Durchdringung mathematischer Inhalte.

„Beweisen, das können meine Schüler nicht!“. Vielleicht liegt diese weitverbreitete Ansicht unter Lehrkräften in den Vorstellungen begründet, die viele vom Begründen und Beweisen aus der eigenen Schul- und Studienzeit in den Lehrberuf mitbringen. Oft herrscht noch der Eindruck vor: je abstrakter die Beweisführung, desto hochwertiger die Argumentation. Die kommunikativen, modellierenden und argumentativen Prozesse, die im Vorfeld einer formalisierten Mathematik an der Tagesordnung sind, spielen in der Lehrerbildung kaum eine Rolle. Mathematik wird – vor allem an Universitäten – noch immer primär vermittelt als eine fertige und abstrakt-logische Wissenschaft, die man dann beherrscht, wenn man in der Lage ist, mit den innermathematischen Formalismen sicher und überzeugend umzugehen. Nicht-formale Beweise oder Begründungen werden in der wissenschaftlichen Ausbildung eher als dilettantisch oder naiv abgetan.

Diese Ansicht entspricht allerdings nicht einem schülergemäßen Begründen und Argumentieren. Denn im schulischen Kontext ist das Argumentieren die Grundlage des Verstehens, das dadurch initiiert wird, immer wieder nach dem Warum zu fragen. Wenn man die Lernenden dazu ermutigen will – und das sollten wir wirklich tun, damit Mathematik nicht auf ein stupides Algorithmisieren reduziert wird –, benötigen diese das mathematische Rüstzeug, um darauf zu antworten. Wie dieses Rüstzeug aussehen kann, dazu macht diese Unterrichtseinheit Vorschläge.

Im Mathematikunterricht spielen nicht nur die formalen Beweise der Fachwissenschaft eine wichtige Rolle. Es ist vielmehr wichtig, die grundlegenden Denkprinzipien und Begründungsstrategien zu lernen und zu verstehen sowie unterschiedliche Argumentationsarten zu akzeptieren und zu fördern. Die Schüler sollen lernen, dass die Suche nach geeigneten grafischen Darstellungen (bildliche Argumentation), nach Beispielen und Gegenbeispielen oder nach passenden Situationen (kontextorientierte Argumentation) sowie die Verwendung von Variablen (algebraische Argumentation) hilfreiche Argumentationsstrategien sind. Dazu müssen diese Beweisformen aber regelmäßig im Unterricht vorkommen und es muss über die Aussagekraft und die dahinterstehenden Prinzipien reflektiert werden.

I/F

Reihe 11 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Inner- versus außermathematisches Argumentieren

Material	Thema	Stunde
M 1 (Sw-Fo)	Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich? Einstieg mit Beispielen für das Begründen im Alltag und in der Mathematik	1.

Möglichkeiten und Grenzen des Begründens mit Beispielen

Material	Thema	Stunde
M 2 (Ab)	Aussagen bestätigen oder widerlegen Mithilfe von Beispielen Aussagen bestätigen oder widerlegen	2.
M 3 (Ab)	Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel Vermutungen beweisen / widerlegen; Aussagen auf ihre Allgemeingültigkeit überprüfen	3.
M 4 (Ab)	Wo steckt der Fehler? – Ergebnisse überprüfen In Rechnungen Fehler finden; Klammern ausmultiplizieren	4.

Ikonisches und algebraisches Begründen

Material	Thema	Stunde
M 5 (Ab)	Wie kann ich mir das vorstellen? – Variablen und Terme veranschaulichen Variable durch Streckenlängen veranschaulichen	5.
M 6 (Ab)	Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren Das Produkt aus zwei Termen als Rechteck veranschaulichen	
M 7 (Ab)	Gar nicht so schwierig! – Die 1. binomische Formel grafisch begründen Sich die 1. binomische Formel grafisch veranschaulichen	6.
M 8 (Ab)	Für alle Zahlen gleichzeitig – mit Variablen begründen Einfache mathematische Beweise nachvollziehen	7.
M 9 (Ab)	Mach dich fit! – Begründen mit Variablen und Termen Aussagen mathematisch begründen mit Variablen und Termen	8.

Die Beweisstrategien festigen und Zusatzmaterial

Material	Thema	Stunde
M 10 (LEK)	Teste dich selbst! Den Lernerfolg überprüfen	9.
M 11/M 12 (Ab)	Das merk ich mir! – Mein Memoblatt 1 und 2 Die Merkgeregeln übersichtlich auf den Memoblättern festhalten	

I/F

Reihe 11	Verlauf	Material S 1	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 1 Warm-up – was heißt „begründen“ eigentlich?

Wir brauchen stichhaltige Beweise!

Beweis mir das erst mal!

Ich konnte ihn vom Gegenteil überzeugen.

Überzeuge dich selbst, überzeuge deinen Freund, überzeuge deinen Feind!

Was bedeuten die Zitate? Worum geht es hier?

I/F

Im Zweifel für den Angeklagten!

Bilder: 1–3: Thinkstock; 4. colourbox

Was meint ihr zu dieser Aussage? Ist sie richtig oder falsch?

Smartphones auf dem Vormarsch:

Immer mehr Deutsche nutzen mittlerweile Smartphones als Kombination aus Handy und Internet. Nach einer Studie von STATISTA besitzt aktuell bereits jeder zweite Deutsche ein Smartphone.

Welche Gleichung passt zur Zeitungsmeldung? Warum?

- a) $D + S = 2$ b) $2 \cdot S = D$ c) $D - 2 = S$ d) $D = \frac{1}{2} S$

Reihe 11	Verlauf	Material S 3	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 3 Aufgepasst! – Nicht immer genügt ein Beispiel

Beispiele helfen beim Begründen. Aber nicht immer reichen sie aus.

Aufgabe 1

Yasmin hat im letzten Schuljahr auf eine Mädchenschule gewechselt und hat seitdem bessere Noten. Deshalb vermutet sie:

Unterricht, in dem Jungen und Mädchen getrennt lernen, führt zu besseren Schulleistungen.

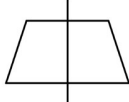


Diskutiere Yasmins Vermutung mit deinem Nachbarn. Stimmt du ihr zu?

Aufgabe 2

Welche Vermutungen sind richtig? Welche sind falsch?

Welche Begründungen überzeugen dich? Welche nicht? Achte auf die Formulierungen.

Vermutung	Richtig? Falsch?	Begründung/Beweis
a) Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer durch 2 teilbar.		$133 + 109 = 242$ $242 : 2 = 121$
b) Ein Trapez hat genau eine Symmetrieachse.		
c) Beim Kürzen von Brüchen streicht man im Zähler und Nenner gleiche Ziffern weg.		$\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ (0 wegstreichen) $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ (6 wegstreichen) $\frac{49}{98} = \frac{4}{8}$ (9 wegstreichen)
d) Wenn man in den Term $(a - b)^2 - (a + b)^2$ konkrete Zahlen einsetzt, kommt immer eine Quadratzahl heraus.		$(1 - 0)^2 - (1 + 0)^2 = 1 - 1 = 0 = 0^2$ → Null ist die Quadratzahl von Null.
e) Egal, welche Zahlen man für a und b einsetzt, der Term $(a - b)^2$ hat immer ein positives Ergebnis.		$a = -10; b = 65$ $(-10 - 65)^2 = 5625$

I/F

Aufgabe 3 – mein Memoblatt

Je nach Formulierung sollen Aussagen allgemein – also immer – gelten oder nur für einen Einzelfall. In der Mathematik ist man besonders an allgemeingültigen Aussagen interessiert.



Erkläre, warum man allgemeingültige Aussagen nicht mit einem Beispiel begründen kann und warum man sie durch ein Gegenbeispiel widerlegen kann. Übertrage deine Erkenntnisse auf dein Memoblatt 1.

Reihe 11	Verlauf	Material S 6	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

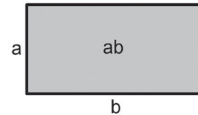
M 6 Das wird ja ein Rechteck! – Terme multiplizieren

Du kannst dir Terme als Streckenlängen vorstellen. Was bedeutet es aber geometrisch, wenn du zwei Terme multiplizierst?

Aufgabe 1

$a \cdot b$ ist das Produkt aus den beiden Seitenlängen eines Rechtecks.

ab steht also für den Flächeninhalt des Rechtecks.



a) Welchen Flächeninhalt hat ein Rechteck mit den Seitenlängen $2x$ und $3y$?

Tipp Mache dir eine Skizze und zerlege die beiden Seiten des Rechtecks in sinnvolle Teilstücke. Dann kannst du anschließend durch Hilfslinien auch den Gesamtflächeninhalt des Rechtecks in kleinere Teilrechtecke zerlegen.

b) Begründe mit einer geeigneten Zeichnung (Rechteck) ähnlich wie in a), dass diese Berechnungen richtig sind:

(1) $4s \cdot t = 4st$

(2) $5k \cdot 5m = 25km$

(3) $6a \cdot 2a = 12a^2$

a steht in einer Aufgabe immer für dieselbe Streckenlänge.



Aufgabe 2

a) Kilian macht immer wieder diese Fehler: $b \cdot b = 2b$ und $b + b = b^2$

Erkläre ihm mit einer Zeichnung, was er sich jeweils vorstellen kann, um diese Fehler zu vermeiden.

b) Lea hat Folgendes gerechnet: $3ab + 2ab = 6ab$

Begründe mithilfe von Rechtecken, warum diese Rechnung falsch ist.

Aufgabe 3

Zeichne für die folgenden Terme jeweils ein Rechteck ins Heft, sodass man den Term am Rechteck ablesen kann. Ordne die Terme dazu in Gruppen. Welche Terme sind ähnlich?

Tipp Kannst du manchmal etwas ausklammern?

a) $10 \cdot (5 + 8)$

b) $3 \cdot 5 + 3 \cdot 8$

c) $z \cdot (x + y)$

d) $cd + ef$

e) $2 \cdot (2 + 3 + 4)$

f) $(a + b + c) \cdot d$

Für Schnelle: Gib dir eigene Terme vor und stelle diese durch geeignete Rechtecke dar. Lass sie anschließend von einem anderen Schnellen überprüfen.

Aufgabe 4 – mein Memoblatt

Du hast gelernt, was man sich unter Termen geometrisch vorstellen kann. Überlege mit deinem Nachbarn, wie ihr eure Erkenntnisse in das Memoblatt 2 eintragen könnt.

