Inhalt

		Seite
	Vorbemerkungen	4
	Grobüberblick zu den Teilen A, B, C, D, E	**5**
	Erläuterungen zu B: Flächenberechnung nach Formelsammlung	6 - 7
	Erläuterungen zu C: Flächenberechnung nach dem Satz von Pick	8 - 12
	Erläuterungen zu D: Karteikarten	13 - 14
	Erläuterungen zu E: Aufgabenkarten	15 - 17
A	**Historisches zu π**	**18 - 21**
B	**Flächenberechnung nach Formelsammlung**	**22 - 31**
C	**Flächenberechnung nach dem Satz von Pick**	**32 - 55**
D	**Karteikarten**	**56 - 75**
E	**Aufgabenkarten**	**76 - 95**

Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg KOHL VERLAG

Sicherlich kennen Sie als Mathematiklehrer/in die diversen Verfahren zur Ermittlung des Flächeninhalts von Kreisen und somit die Annäherungsverfahren zur Berechnung von π. Eines der schönsten Verfahren ist aber den meisten Unterrichtenden unbekannt.

Stellen Sie sich einmal vor, Ihre Schüler bräuchten keinerlei Formeln zu kennen. Simples Abzählen ist alles was sie können müssen.

Sie glauben das nicht? Doch, der Satz von Pick macht es möglich.

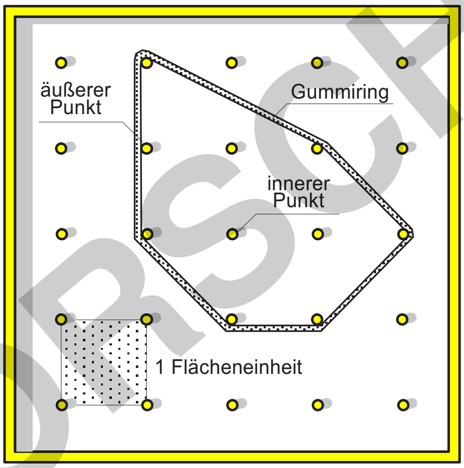
Ihre Schüler/innen werden in einem aktiv-entdeckenden Lernprozess den Zusammenhang herstellen können zwischen dem Flächeninhalt eines Gitterpolynoms P und der Anzahl der zu P gehörigen Gitterpunkte ohne dass sie mit Formeln übermäßig belastet werden.

Gut, eine einzige Formel ist zu entwickeln: $A(n,i) = n : 2 + i - 1$.

Aber auch diese Formel lässt sich salopp formulieren:

Um den Flächeninhalt eines Vielecks zu berechnen, braucht man nur die Anzahl der äußeren Gitterpunkte zu halbieren und dazu die um Eins verminderten inneren Gitterpunkte zu addieren.

Beispiel:
Wie groß ist die Fläche, die vom Gummiring umspannt wird?



Wir zählen die Gitterpunkte, die auf dem Rand liegen: 7.

Wir zählen die Gitterpunkte, die innerhalb des Gebietes liegen: 3.

Und schon hat man den Flächeninhalt mit 5,5 Flächeneinheiten bestimmt.

$A = 7 : 2 + 3 - 1$

Dieser Sachverhalt lässt sich sehr gut zur Berechnung des Flächeninhalts eines Viertelkreises nutzen und führt letztendlich zu der angenäherten Lösung von π = 3,14. Die Kopiervorlagen dieses Bandes sind so zusammengestellt, dass bei den Schülern Entdeckungsprozesse stattfinden können, indem Sie als Lehrperson Denkanstöße geben und den Austausch zwischen den Schülern fördern.

Viel Spaß und Erfolg beim Einsatz der Materialien wünschen Ihnen der Kohl-Verlag und

Hans J. Schmidt

A Historisches zur Zahl π

Im ersten Teil erhalten die Schülerinnen und Schüler eine historische Einführung zur Zahl π und wenden verschiedene Verfahren direkt an *(siehe Seiten 18 - 21).*

B Flächenberechnung nach Formelsammlung

Bevor es zur Flächen- und Umfangsberechnung vom Kreis kommt, wird der Umfang und Flächeninhalt vom Quadrat, Rechteck, Dreieck, Raute, Drachen, Parallelogramm und Trapez wiederholt und in einer Formelsammlung zusammengefasst *(siehe Seiten 22 - 27).* Im Anschluss wird eine weitere Formelsammlung zum Kreis, Kreisring, Kreisausschnitt und Kreisabschnitt erstellt *(siehe Seiten 28 - 31).*

C Flächenberechnung nach dem Satz von Pick

Die Schülerinnen und Schüler lernen eine neue Methode kennen, Flächeninhalte zu berechnen. Der Satz von Pick wird angewendet, um die Fläche eines Vielecks zu berechnen, welches auf einem quadratischen Gitternetz liegt. Dazu wird die Anzahl der äußeren Gitterpunkte (abgekürzt mit n) und die Anzahl der inneren Gitterpunkte (abgekürzt mit i) gezählt und in die Formel A(n,i) = n : 2 + i – 1 eingesetzt *(siehe Seiten 32 - 51).* Der Satz kann auch benutzt werden, um den Flächeninhalt eines Kreises oder eines Kreisausschnittes näherungsweise zu berechnen. Dazu wird ein Vieleck entlang der Kreislinie gelegt. Mit Hilfe des Satzes von Pick kann der Flächeninhalt dieses Vielecks berechnet werden *(siehe Seiten 52 - 55).*

Im Folgenden ist es den Schülern freigestellt, ob sie mit der Methode nach Pick Aufgaben annäherungsweise berechnen wollen, oder ob sie die Formeln aus der Formelsammlung anwenden möchten.

D Karteikarten

Die erarbeiteten Formeln zum Kreis werden mit Hilfe von den Aufgaben auf den Karteikarten vertieft *(siehe Seiten 56 - 75).* Die Karten beinhalten dabei sowohl die Aufgabenstellung als auch die Lösung. Daher können die Schülerinnen und Schüler ihr neues Wissen eigenständig festigen.

E Aufgabenkarten

Im letzten Teil gibt es Aufgabenkarten, welche die Lehrperson als Grundlage für Klassenarbeiten verwenden kann. Diese Aufgabenkarten können beliebig mit eigenen Aufgabenstellungen erweitert werden *(siehe Seiten 76 - 95).*

Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Da bei den Schülerinnen und Schülern immer wieder Schwierigkeiten bei der Unterscheidung zwischen Umfang und Flächeninhalt auftauchen, empfiehlt sich, zu Beginn der Unterrichtsreihe „Kreis“ die Wiederholung Umfang und Flächeninhalt Quadrat, Rechteck, Dreieck, Raute, Drachen, Parallelogramm und Trapez. Ganz sicherlich gehört auch noch hinzu, dass der sichere Umgang mit den Längen und Flächeneinheiten gewährleistet ist.

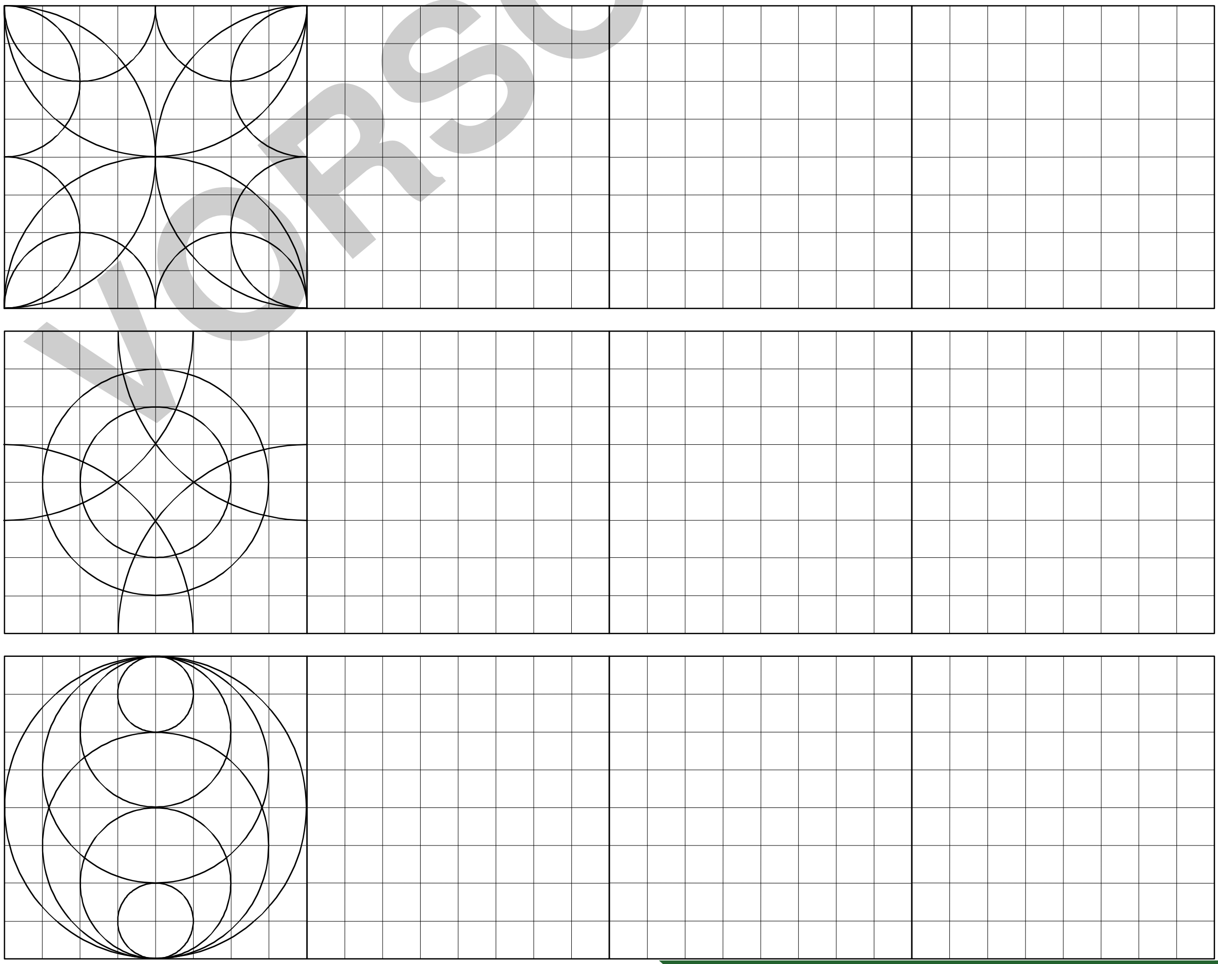
Es sollte aber nicht so sein, dass der Unterrichtende selbst die Unterrichtsinhalte aus den Jahrgangsstufen 5/6 und 7/8 vorträgt, sondern Schülerinnen und Schüler sollen selbständig in Gruppen eigene Formelsammlungen zusammenstellen. Dazu kann die Vorlage auf Seite 22 benutzt werden.

Im Anschluss daran können Aufgaben bearbeitet werden, wie sie auf Seite 24 vorgestellt werden. Die Lösungswege können in Gruppenarbeit verglichen und geklärt werden.

Im Anschluss daran kann man auf den Umfang und den Flächeninhalt von Kreisen zu sprechen kommen und die damit verbundene Problematik.

Es bietet sich an, dass Schülerinnen und Schüler zunächst einmal den sicheren Umgang mit dem „Werkzeug Zirkel“ üben und vorgegebene Ziermuster nachzeichnen. Auch das „Erfinden“ eigener Ziermuster und die Ausgestaltung derselben empfiehlt sich *(siehe hierzu Seite 26 und Seite 27).*

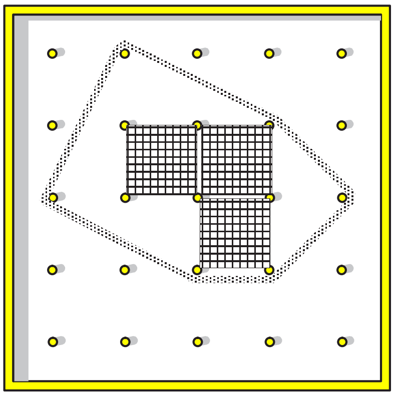
Beispiele von Ziermustern, welche mit dem Zirkel gezeichnet werden.



Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg KOHL VERLAG

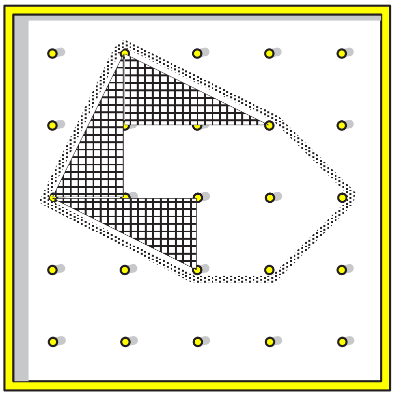
Manchmal ist es günstiger, die Fläche selbst in Teile zu zerlegen:

1. Schritt



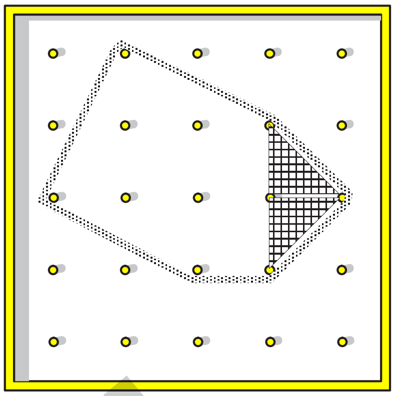
3 Flächeneinheiten

2. Schritt



3 Flächeneinheiten

3. Schritt



1 Flächeneinheit

Wenn dieses Verfahren hinreichend beherrscht wird, bereitet es keinerlei Schwierigkeiten, in Gruppen- oder Partnerarbeit die Tabelle (siehe Seite 32) auszufüllen und entsprechend dokumentieren zu lassen.

	1. Figur	2. Figur	3. Figur	4. Figur
1. Reihe	0,5	0,5	0,5	0,5
2. Reihe	1,0	1,0	1,5	1,5
3. Reihe	1,5	2,0	2,0	2,5
4. Reihe	2,0	2,5	3,0	3,5
5. Reihe	2,5	3,0	3,5	4,0

Die Interpretation dieser Tabelle wird vermutlich etwas schwerer fallen, ist aber dennoch von Schülerinnen und Schülern leistbar. Aussagen wie „Wenn die Figur Innenpunkte hat, wird der Flächeninhalt größer“ oder „Je mehr Innenpunkte eine Figur einer Reihe hat, umso größer wird der Flächeninhalt“ führen schließlich zu dem Ergebnis, dass sich der Flächeninhalt mit jedem hinzukommenden Innenpunkt um 0,5 Flächeneinheiten erhöht. Dieser Sachverhalt soll jetzt genauer untersucht werden.

Es werden vier Gruppen gebildet, die unterschiedliche Arbeitsaufträge erhalten.

Die erste Gruppe untersuch Flächen, die keinerlei Innenpunkte aufweisen. Dabei sollen sie selbst weitere Figuren finden, bei der die Anzahl der äußeren Gitterpunkte 3, 4, 5, 6, 7 beträgt und die keinen einzigen Innenpunkt aufweisen (siehe Seite 34).

Die 2. Gruppe untersucht Flächen, die genau einen Innenpunkt aufweisen. Auch sie sollen weitere Figuren finden, bei der die Anzahl der äußeren Gitterpunkte 3, 4, 5, 6, 7 beträgt und die nur zwei Innenpunkte aufweisen (siehe Seite 36).

Die 3. Gruppe untersucht Flächen, die genau zwei Innenpunkte aufweisen. Auch sie finden weitere Figuren, bei der die Anzahl der äußeren Gitterpunkte 3, 4, 5, 6, 7 beträgt und die nur zwei Innenpunkte aufweisen (siehe Seite 38).

Die 4. Gruppe untersucht Flächen, die genau drei Innenpunkte aufweisen. Auch sie finden weitere Figuren, bei der die Anzahl der äußeren Gitterpunkte 3, 4, 5, 6, 7 beträgt und die nur drei Innenpunkte aufweisen (siehe Seite 40).

Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg HL VERLAG

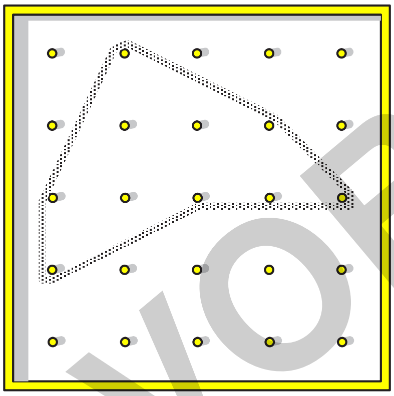
Diese Form des Unterrichts – als Gruppenpuzzle oder auch Jigsaw-Methode bekannt – wurde von israelischen und amerikanischen Sozialpsychologen und Lehrerbildnern entwickelt. Dabei wird ein Problem in mehrere Teile zerlegt („gesägt“) und an Gruppen verteilt, die ihr Teilproblem bearbeiten. Irgendwann, wenn alle Puzzlestücke bearbeitet und vorgestellt wurden, fügen sich die Teile zu einem Ganzen zusammen.

Da die vier Gruppen jeweils ihre Ergebnisse präsentieren sollen, empfiehlt es sich, nicht nur die entsprechenden Arbeitsblätter für die Gruppe zu kopieren, sondern auch von den Seiten 34, 36, 38 und 40 Folien zu ziehen, die man nebst Folienstiften den einzelnen Gruppen für die Präsentation zur Verfügung stellt.

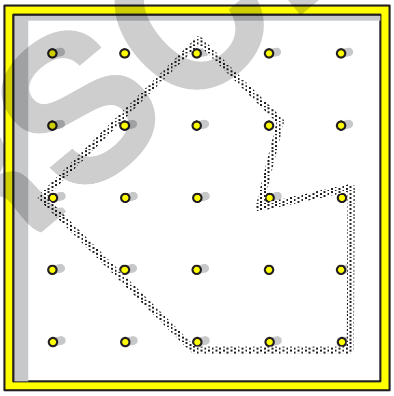
Achten Sie bitte bei der Präsentation der Ergebnisse darauf, dass es jeden in der Gruppe treffen kann. Am besten lost man aus, wer das Gruppenergebnis vorstellt (siehe hierzu auch die Methoden zum kooperativen Lernen nach Norman Green).

Die Schreibweise A(n,0) bzw. A(n,1), A(n,2), A(n,3) ist natürlich gewöhnungsbedürftig und für Schülerinnen und Schüler schwer nachvollziehbar. Entsprechende Hinweise, dass z.B. A(7,2) eine Figur kennzeichnet, die 7 Außenpunkte und 2 Innenpunkte aufweist und A(n,4) eine Figur sein kann, die z.B. 3 Außen- und 4 Innenpunkte hat oder auch 4 oder 5 oder 6 Außen- und 4 Innenpunkte hat, können das Verständnis erleichtern. Noch besser ist es, die Schülerinnen und Schüler die Kennzeichnungen für Figuren finden oder herstellen zu lassen.

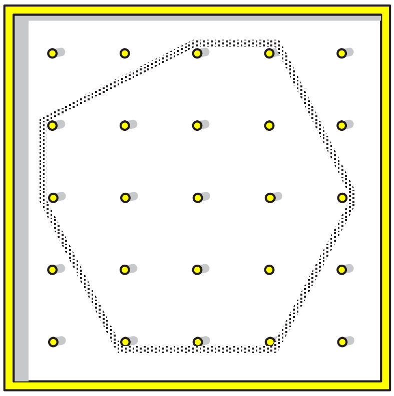
Wie kann man folgende Figuren charakterisieren?



A(7,3)



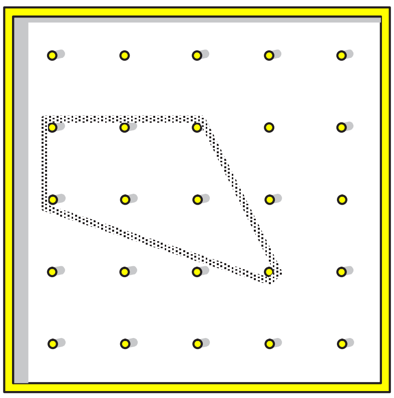
A(11,5)



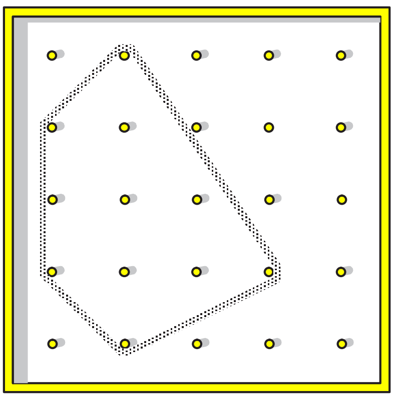
A(8,9)

Stelle eine Figur her mit

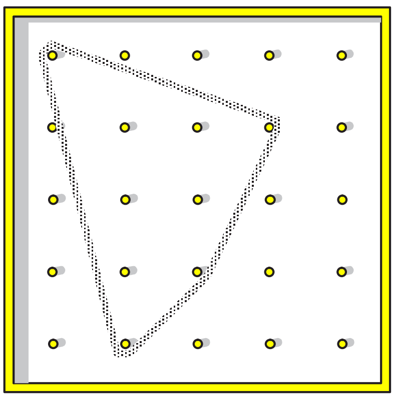
a) A(5,2)



b) A(6,5)



c) A(4,5)

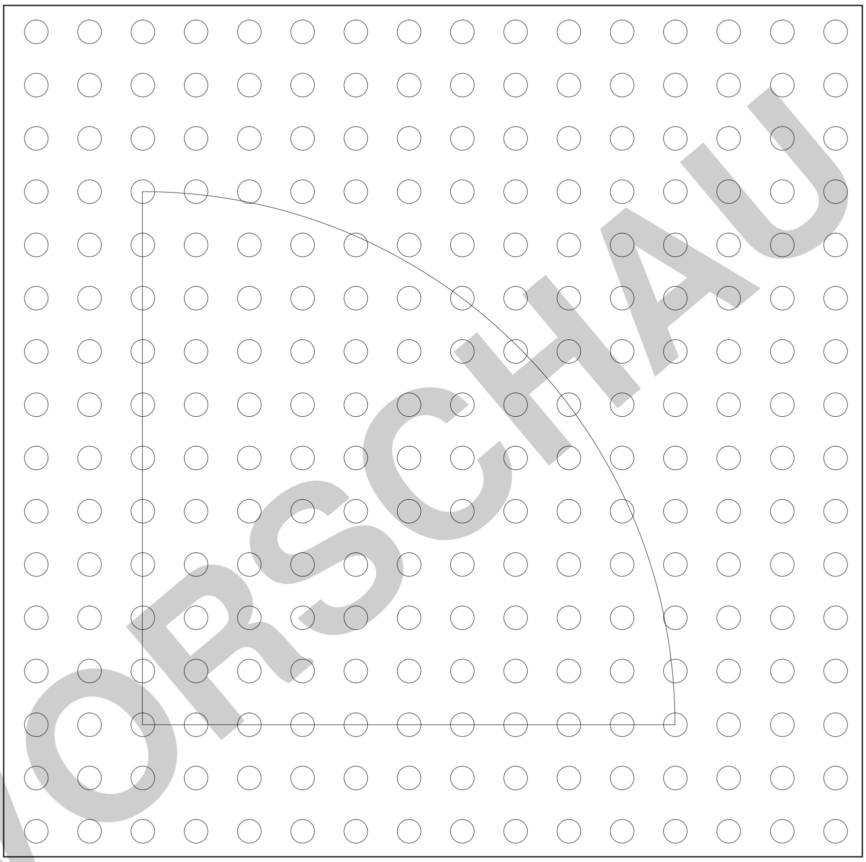


Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
KOHL VERLAG Lernen mit Erfolg

Gilt diese Formel für alle möglichen Polygonzüge? Diese Frage lässt sich in der Sekundarstufe I nur experimentell beantworten.

Dazu dienen die Seiten 44, 46, 48 und 50, die wiederum in Gruppen bearbeitet werden. Es zeigt sich, dass die Formel $A(n,i) = n : 2 + i - 1$ nur für einfach zusammenhängende Vielecke gilt (siehe Lösungen Seite 45, 47, 49, 51).

Jetzt ist es möglich, den Flächeninhalt von Kreisen annähernd zu berechnen, indem man den Schülerinnen und Schülern die Vorlage auf Seite 52 zu Verfügung stellt mit dem Auftrag, die Flächeninhalte eines einbeschriebenen und eines umbeschriebenen Vielecks zu bestimmen (siehe Seite 53, 54, 55).



Somit erhält man die Flächeninhaltsformel für den Kreis:

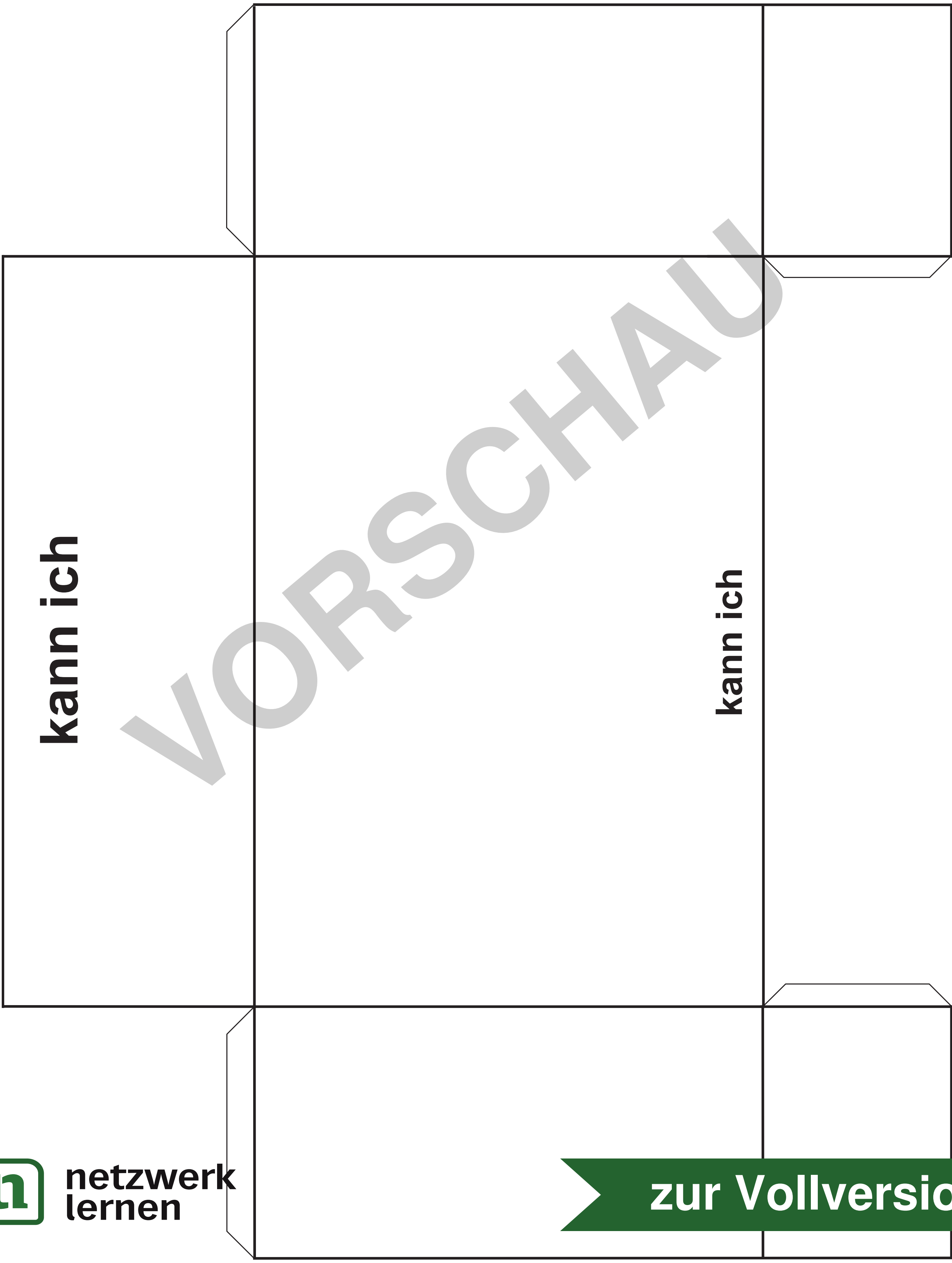
$$\frac{A}{r^2} = \pi \qquad \text{und} \qquad A = r^2 \cdot \pi$$

Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg KOHL VERLAG

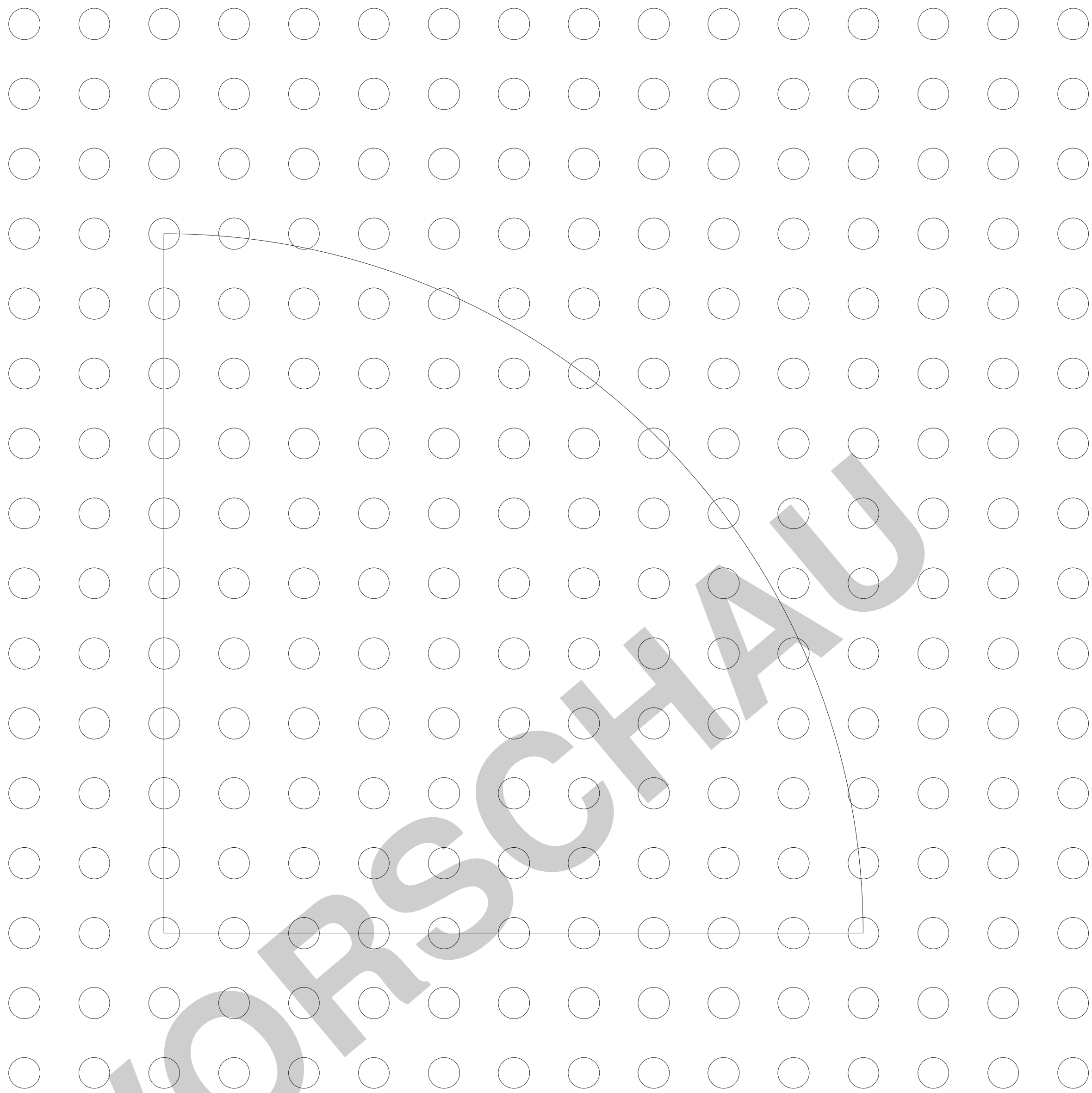
Erläuterung zu D: Karteikarten

Die Schülerinnen und Schüler müssen zunächst die Karteikarten auseinander schneiden und in der Mitte knicken. Dabei ist auf der Vorderseite die Aufgabenstellung und auf der Rückseite die Lösung. Diese Vorgehensweise ermöglicht den Schülern das eigenständige üben und vertiefen.

Die Aufgaben sind mit Sternen versehen, die den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe beschreiben. Wenn die Schüler eine Aufgabe bearbeitet haben, ordnen sie die einzelnen Karteikarten in die Box „kann ich“ oder „kann ich noch nicht“. Dies Boxen müssen vorab ausgeschnitten und geklebt werden.



Flächenberechnung nach dem Satz von Pick



Du siehst hier einen Viertelkreis mit dem Radius r = 10 Einheiten.

a) Zeichne ein Vieleck, das dem Viertelkreis einbeschrieben ist. Bestimme nach der Formel A(n,i) = n : 2 + i – 1 den Flächeninhalt A_{einb} dieses Vielecks.

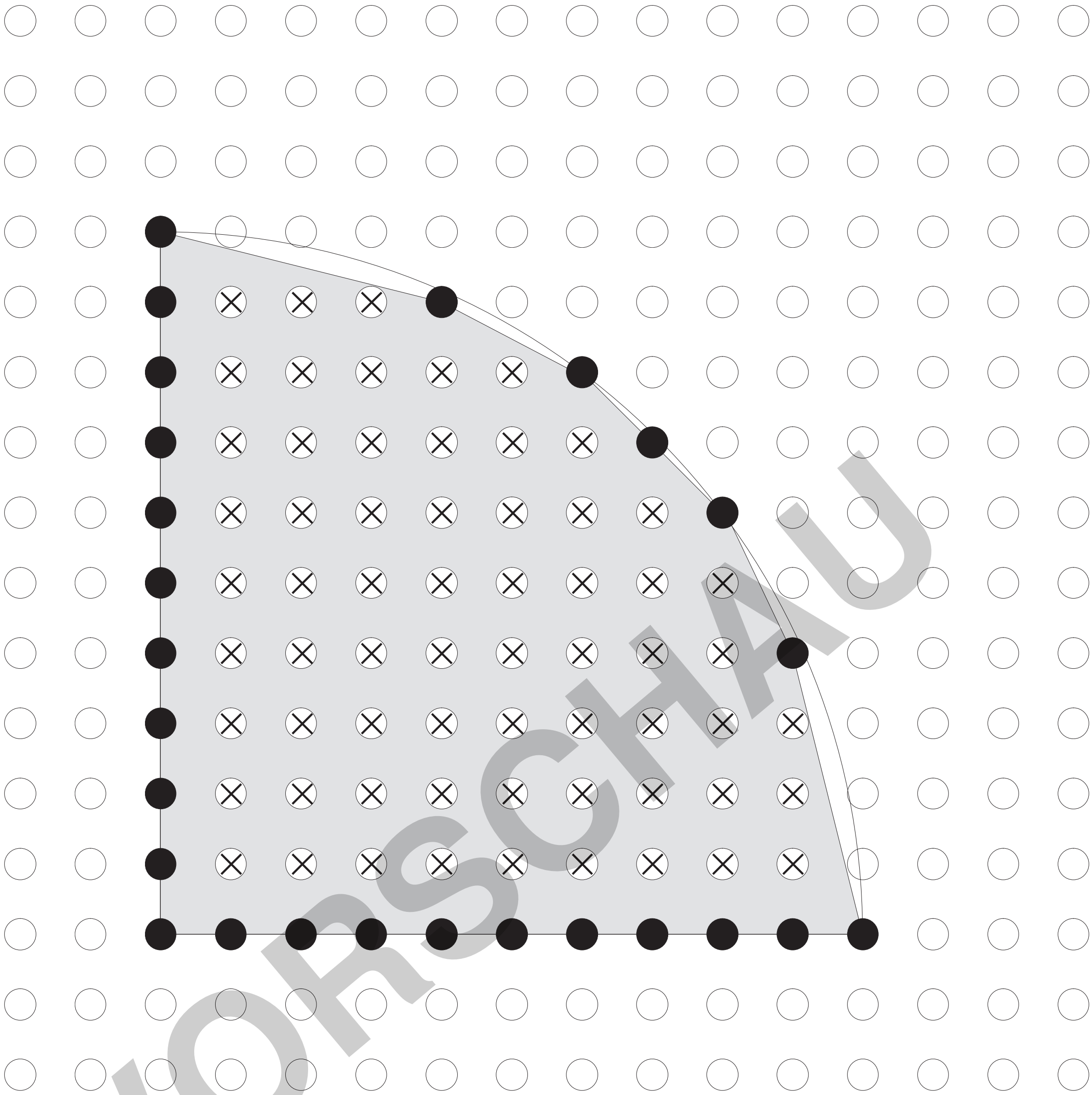
b) Zeichne ein Vieleck, das dem Viertelkreis umbeschrieben ist. Bestimme nach der Formel A(n,i) = n : 2 + i – 1 den Flächeninhalt A_{umb} dieses Vielecks.

c) Bilde den Mittelwert aus A_{einb} und A_{umb}. Was erhältst du?

d) Multipliziere diesen Mittelwert mit 4, damit du den ungefähren Flächeninhalt für einen Vollkreis erhältst.

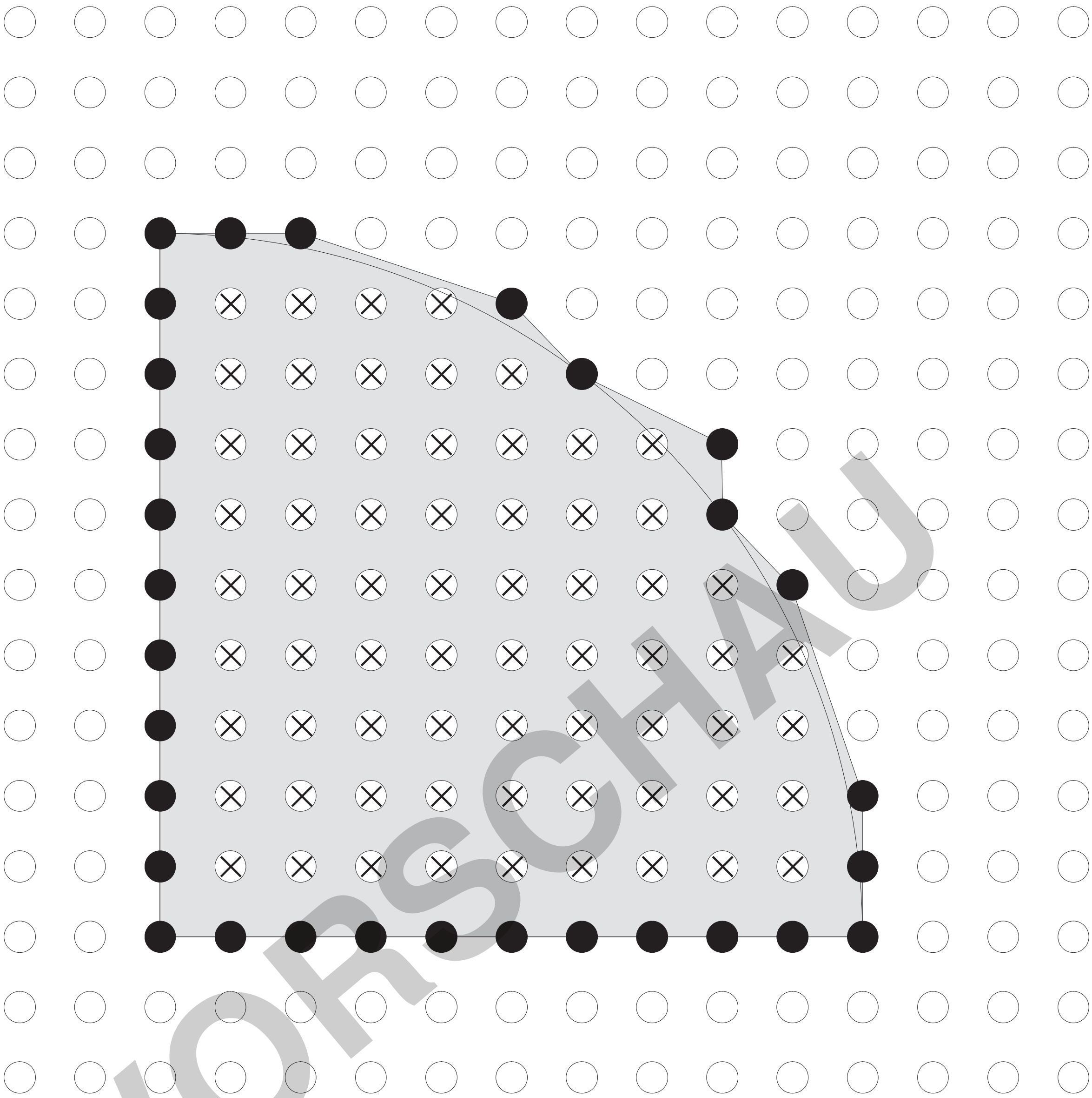
e) Dividiere durch r^2. Du erhältst jetzt eine ganz be… manchem Mathematiker schlaflose Nächte bereite…

Flächenberechnung nach dem Satz von Pick



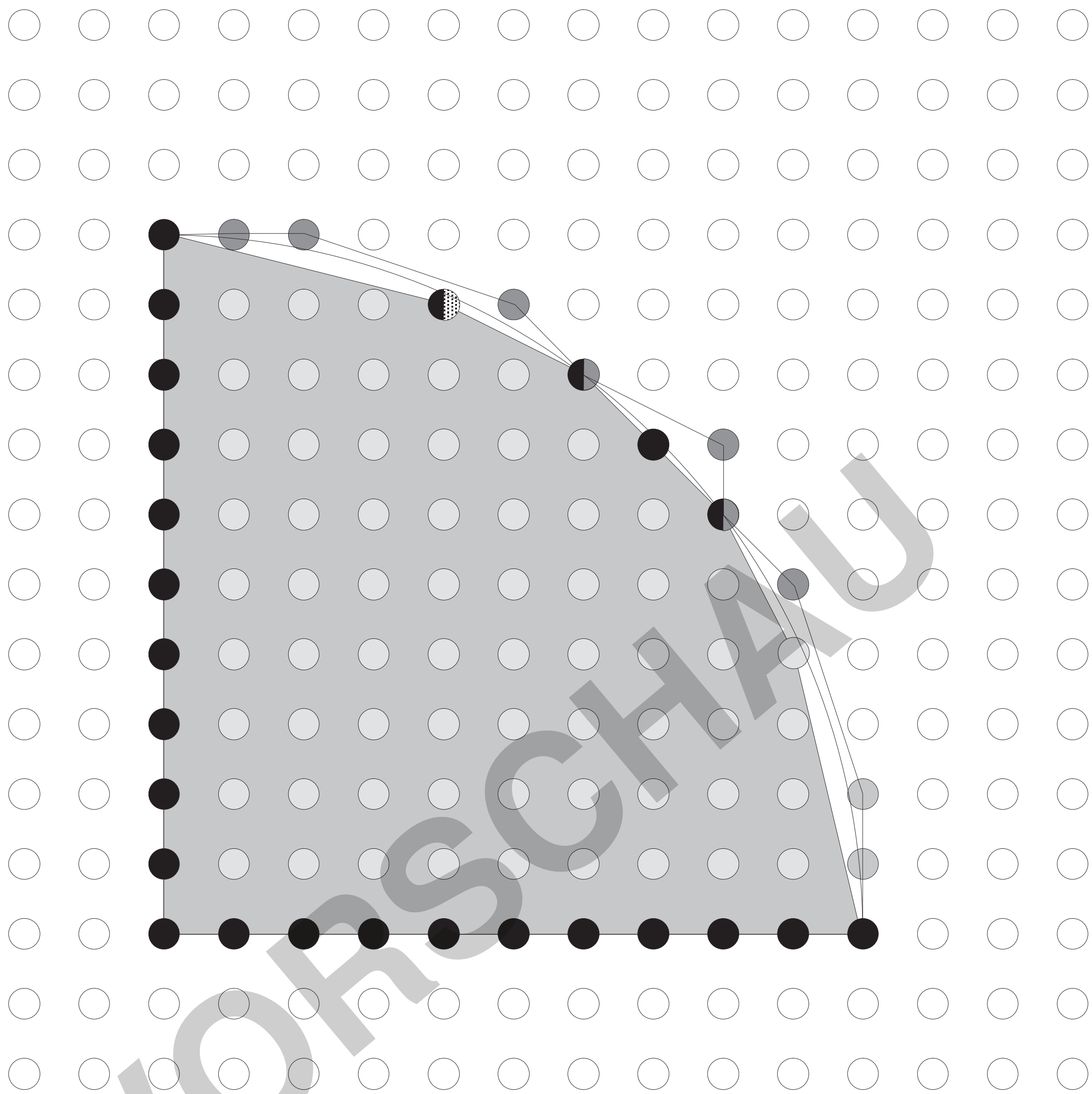
Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg KOHL VERLAG

Flächenberechnung nach dem Satz von Pick



C

Flächenberechnung nach dem Satz von Pick



Du siehst hier einen Viertelkreis mit dem Radius r = 10 Einheiten.

a) Zeichne ein Vieleck, das dem Viertelkreis einbeschrieben ist. Bestimme nach der Formel A(n,i) = n : 2 + i – 1 den Flächeninhalt A_{einb} dieses Vielecks.

A_{einb}(26,64) = 26 : 2 + 64 – 1 = 76

b) Zeichne ein Vieleck, das dem Viertelkreis umbeschrieben ist. Bestimme nach der Formel A(n,i) = n : 2 + i – 1 den Flächeninhalt A_{umb} dieses Vielecks.

A_{umb}(30,67) = 30 : 2 + 67 – 1 = 81

c) Bilde den Mittelwert aus A_{einb} und A_{umb}. Was erhältst du?

(76 + 81):2 = 78,5

d) Multipliziere diesen Mittelwert mit 4, damit du den ungefähren Flächeninhalt für einen Vollkreis erhältst.

78,5 • 4 = 314

e) Dividiere durch r^2. Du erhältst jetzt eine ganz be… manchem Mathematiker schlaflose Nächte bereite…

Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899
Lernen mit Erfolg
VERLAG

✱✱

Wie oft drehen sich die Räder einer Stagecoach bei einer Geschwindigkeit von 25,2 km/h in einer Minute, wenn der Durchmesser des großen Rades mit 1,50 m und des kleinen Rades mit 1,20 m gemessen wird?

Aufgabe Nr. 3 Mathematik entdecken

✱

Die Baumstammfläche, die Holzfäller Jack Lumber da zersägte, hatte eine Größe von 0,85 m².
Wie groß war der Durchmesser des Stammes?

Aufgabe Nr. 4 Mathematik entdecken

Lösung Nr. 3 Mathematik entdecken

$u_{\text{kleines Rad}} = 2 \cdot 0{,}60 \cdot \pi$ $u_{\text{großes Rad}} = 2 \cdot 0{,}75 \cdot \pi$

$u_{\text{kleines Rad}} = 3{,}77\ (\text{m})$ $u_{\text{großes Rad}} = 4{,}712\ (\text{m})$

25,2 km/h = 25200 m/h = 420 m/min

420 : 3,77 = 111,4 420 : 4,712 = 89,13

Das kleine Rad dreht sich ungefähr 111-mal, das große Rad 89-mal.

LÖSUNG

Lösung Nr. 4 Mathematik entdecken

$A_{\text{Baumstamm}} = r^2 \cdot \pi$

$r^2 = \frac{A_{\text{Baumstamm}}}{\pi}$

$r = \sqrt{\frac{A_{\text{Baumstamm}}}{\pi}}$

$r = \sqrt{\frac{0{,}85}{\pi}}$

$r = 0{,}52\ (\text{m})$

Der Durchmesser des Baumstamms beträgt 1,04 m.

LÖSUNG

Lernen mit Erfolg HL VERLAG
Mathe entdecken
Berechnungen an Vielecken & Kreisen – Bestell-Nr. P11 899