

## CAS im Einsatz – lineare Gleichungssysteme lösen

Jens Mittag, Oxbüll

The screenshot shows a CAS interface with a toolbar at the top containing symbols for equals, approximate, check, fraction (15/3\*5), parentheses, exponent, x=, x≈, f', graph, and delete. Below the toolbar is a table with 5 rows:

1	x ist das Alter von Amelie.
2	y ist das Alter von ...
3	Gleichung_1 → Gleichung_1: $x + y = 59$
4	Gleichung_2 → Gleichung_2: ... = 12
5	Löse{{Gleichung_1, Gleichung_2},{x,y}} → {{x = 19, y = 40}}

**Klasse:** 8–10

**Dauer:** 6 Stunden

**Inhalt:** lineare Gleichungssysteme mithilfe eines CAS lösen; Sachaufgaben in lineare GLS überführen; Äquivalenzumformungen von GLS üben; grafische Lösungen erstellen und interpretieren

**Ihr Plus:**

- ✓ moderner computerunterstützter Mathematikunterricht
- ✓ Lernerfolgskontrolle
- ✓ geeignet für fachübergreifenden Unterricht (Informatik)

I/G

Ein CAS-Programm (Computer Algebra System) ist eine Software, die Mathematikaufgaben mit symbolischen Ausdrücken lösen kann. Nutzen Sie diese moderne Möglichkeit für Ihren Unterricht! Ihre Schüler lernen, wie sie die Möglichkeiten eines CAS gewinnbringend einsetzen, um Mathematik besser zu verstehen. So verlagern Sie in Ihrem Mathematikunterricht den Schwerpunkt vom Rechnen und Umformen zum Problemlösen.

Zum Einsatz kommt das kostenlose CAS-Programm *GeoGebra*.

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Der CAS-Einsatz im Mathematikunterricht

Der Einsatz eines Computer-Algebra-Systems im Mathematikunterricht nimmt den Schülern Rechenarbeit ab. Mit dieser Erleichterung in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten können Sie Ihren Unterricht auf andere mathematische Kompetenzen wie das **Problemlösen** oder **Modellieren** fokussieren. Gewinnbringend wird dies jedoch erst möglich sein, wenn Ihre Schüler das CAS-Programm ausreichend zuverlässig und sicher anwenden können. Auf den Arbeitsblättern dieses Beitrags sind deshalb die notwendigen Kommandos und Eingaben für Ihre Schüler dargestellt.

Bei der Planung Ihres Unterrichts mit CAS-Einsatz müssen Sie überlegen, welche Rechen- und Gedankenschritte Sie vom Schüler erwarten und welche der Computer übernehmen soll. In diesem Beitrag wird am Beispiel der **linearen Gleichungssysteme** gezeigt, dass man die Möglichkeiten eines CAS in verschiedenen Varianten nutzen kann.

### Drei Ansätze zum Bearbeiten linearer Gleichungssysteme mit einem CAS

Mit dem Einsatz des **Löse-Befehls** können Sie Ihren Schülern sämtliche Gedankenschritte beim Lösen des Gleichungssystems abnehmen. Die Aufgabe des Schülers besteht in diesem Fall darin, die Informationen aus der Aufgabenstellung in mathematische Gleichungen zu übersetzen. Entscheiden Sie sich für diese Variante, empfiehlt es sich, gleich zu **M 5** zu springen.

Wollen Sie jedoch, dass Ihre Schüler auch das **Umformen von Gleichungssystemen** üben, können Sie zunächst auf den **Löse-Befehl** verzichten und das CAS als Hilfe bei der schrittweisen Umformung der Gleichungen nutzen. Die nötigen Äquivalenzumformungen müssen die Schüler selbst erkennen, lassen sie aber vom Computer ausführen. Dieses Verfahren lernen Ihre Schüler in **M 1** und **M 2** kennen.

In den Arbeitsblättern **M 3** und **M 4** wird ein Verfahren entwickelt, um die Lösung eines Gleichungssystems auf **grafischem** Wege zu finden. Auch bei diesem Lösungsweg leisten Ihre Schüler keine Rechenarbeit, müssen aber Graphen im Koordinatensystem interpretieren.

### Der Umgang mit GeoGebra

Bevor Sie mit GeoGebra arbeiten können, müssen Sie das Programm aus dem Internet herunterladen und installieren. Sie finden die Installationsdatei leicht, indem Sie in einer Suchmaschine das Schlagwort *GeoGebra* eingeben<sup>1</sup>. Es gibt auch ein GeoGebraWiki, in dem Sie Anleitungen, Hilfen, ein Forum und Materialien für Ihren Unterricht finden. Auch dieses Wiki finden Sie über eine Suchmaschine<sup>2</sup>.

Beginnen Sie auf jeden Fall mit dem Arbeitsblatt **M 1**, wenn Ihre Schüler GeoGebra noch nicht kennen. Hier werden die Grundlagen zum Umgang mit GeoGebra vermittelt. Weitere Hinweise zur Anwendung des Programms finden Sie in dem Abschnitt **Lösungen und Tipps zum Einsatz**.

GeoGebra bietet eine Vielzahl von Befehlen, Arbeitsfenstern und Möglichkeiten, die nicht alle in einem Beitrag bzw. einer Unterrichtsreihe angesprochen werden können. Wenn Sie sich weiter in die Arbeit mit GeoGebra vertiefen möchten, bietet Ihnen das oben genannte GeoGebraWiki vielfältige Möglichkeiten.

<sup>1</sup> <https://www.geogebra.org/>

<sup>2</sup> <http://archive.geogebra.org/de/wiki/index.php/Hauptseite>

<b>Reihe 21</b> S 3	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

**Vorkenntnisse**

- Aufstellen und Lösen linearer Gleichungen
- grafische Interpretation von Schnittpunkten von Geraden, von Schnittpunkten von Geraden mit den Koordinatenachsen und von zueinander parallelen Geraden
- Grundvorstellung zum Funktionsbegriff

**Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz**

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler ...	Anforderungsbereich
K 1–K 6	L 1	... erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge ( <b>M 1, M 2, M 6</b> ), ... wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zugrunde liegen ( <b>M 1, M 2, M 6</b> ), ... prüfen und interpretieren Ergebnisse in Sachsituationen ( <b>M 3, M 5, M 6</b> ),	I–III
K 1–K 6	L 4	... interpretieren lineare Gleichungssysteme grafisch ( <b>M 3, M 4, M 6</b> ), ... lösen lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch – auch unter Einsatz geeigneter Software – und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren ( <b>M 1–M 6</b> ), ... untersuchen Fragen der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen ( <b>M 4</b> ).	I–III

I/G

Für welche Kompetenzen und Anforderungsbereiche die Abkürzungen stehen, finden Sie auf der beiliegenden CD-ROM 64.

**Lehrplanbezug**

Die Schüler erwerben z. B. in Bayern<sup>3</sup> folgendes Grundwissen: [...]

Sie können sicher mit linearen Funktionen arbeiten und Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten lösen. [...] (Klasse 8)

Beginnend mit der **Abiturprüfung 2014** wurde den Schülern die Möglichkeit eingeräumt, im Fach Mathematik an einer CAS-Abiturprüfung teilzunehmen, bei der ein **CAS-Rechner** als Hilfsmittel zugelassen ist<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26378>

<sup>4</sup> <https://www.isb.bayern.de/schulartuebergreifendes/medienbildung/digitales-lernen/computeralgebra-systeme-cas-im-mathematikunterricht/>

<b>Reihe 21</b> S 4	<b>Verlauf</b>	<b>Material</b>	<b>LEK</b>	<b>Glossar</b>	<b>Lösungen</b>
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

## Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	<b>GeoGebra – So arbeitest du mit einem CAS!</b> Einführung in die Arbeitsweise mit dem CAS GeoGebra; Umformen und Lösen von Gleichungen mithilfe von GeoGebra	1.
M 2	<b>Zahlenraten – Mit GeoGebra findest du jede Lösung!</b> Umformen und Lösen von Gleichungssystemen mithilfe von Äquivalenzumformungen in GeoGebra	2.
M 3	<b>Mathematik unterwegs – Funktionen in GeoGebra</b> Im Kontext von Sachaufgaben Funktionsvorschriften nachvollziehen; Funktionen in GeoGebra eingeben und grafisch darstellen	3.
M 4	<b>Das Grafik-Fenster im CAS – Lösungen ablesen</b> Gleichungssysteme grafisch lösen und interpretieren	4.
M 5	<b>Das CAS kann noch mehr! – Lösung in einem Schritt</b> Gleichungssysteme zu Sachaufgaben aufstellen; Einführung des <i>Löse</i> -Befehls, um Gleichungssysteme zu lösen	5.
M 6 (LEK)	<b>Ratespaß – Rätsel mit Gleichungssystemen modellieren</b> Altersrätsel	6.

I/G

### Aufbau des Beitrags

In **M 1** finden Sie eine **Anleitung für den ersten Umgang mit GeoGebra**.

In **M 2–M 5** werden drei Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen erarbeitet:

- Lösung mittels **Äquivalenzumformungen (M 2)**
- **grafisches Lösungsverfahren (M 3 und M 4)**
- Lösung mittels **Löse-Befehl (M 5)**

Diese drei Verfahren bzw. die zugehörigen Materialien können Sie unabhängig voneinander in Ihrem Unterricht einsetzen.

**M 6** bietet Ihnen Aufgaben für die drei Verfahren.

Der Abschnitt **Lösungen und Tipps zum Einsatz** von **M 1** enthält weitere Erklärungen zum Umgang mit GeoGebra.

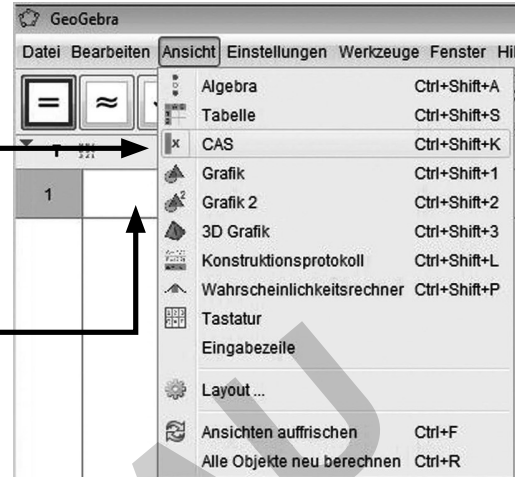
Bei der Bearbeitung der Materialien lernen Ihre Schüler, wie sie Aufgaben mithilfe von GeoGebra lösen können. Um das Gelernte zu vertiefen, bietet es sich an, zusätzliche Aufgaben aus dem eingeführten Unterrichtswerk zu ergänzen.

## M 1 GeoGebra – So arbeitest du mit einem CAS!

Klickst du in GeoGebra auf das Menü **Ansicht**, kannst du verschiedene Arbeitsfenster auswählen.

Wähle das Fenster **CAS** aus. Du erkennst ein ausgewähltes Fenster an der hellblauen Hervorhebung.

In den Eingabezeilen teilst du dem Computer deine Anweisungen mit. Nach jeder Anweisung musst du die **Enter**-Taste drücken.



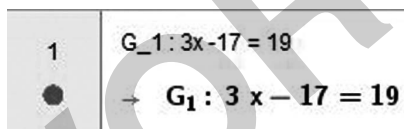
### Aufgabe 1: Dem CAS Objekte mitteilen

Der Doppelpunkt ist in GeoGebra der **Zuweisungsbefehl**. Gibst du in die Eingabezeile **a:7** ein, so wird unter a der Wert 7 gespeichert.

- a) Weise a den Wert 7 zu. Überlege nun, was GeoGebra ausgeben wird, wenn du **10a** in eine Eingabezeile eingibst. Probiere es anschließend aus!

Den Bezeichnern **x**, **y** und **z** kannst du in GeoGebra keinen Wert zuordnen, weil diese für Variable vorbehalten sind.

- b) Versuche, der Variablen **x** in GeoGebra den Wert **7** zuzuordnen, und beobachte, was geschieht.



Du kannst einem Bezeichner auch andere Objekte zuweisen. In der Abbildung links wurde dem Bezeichner **G\_1** eine Gleichung zugewiesen.

- c) Übertrage die obere Zeile aus der Abbildung in dein GeoGebra. Überlege, was GeoGebra ausgeben wird, wenn du **G\_1 + 17** in der nächsten Eingabezeile eingibst. Probiere es anschließend wieder aus!

### Aufgabe 2: Gleichungen durch Umformen lösen

In der Abbildung rechts siehst du, wie du Gleichungen mit einem CAS schrittweise umformen und lösen kannst. Schau dir das Beispiel an und löse auf dieselbe Weise folgende Gleichungen.

- a)  $5x + 23 = 36$       b)  $-13x - 15 = 26$   
c)  $7x - 23 = 2x + 19$       d)  $-8x + 3 = 12x - 4$

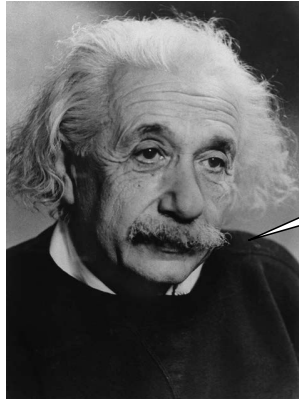
In den nächsten beiden Aufgaben musst du die Kommas der Dezimalzahlen als **Punkte** in GeoGebra eingeben.

- e)  $6,2(x - 5,1) = -23,1x + 16,5$   
f)  $3,1x - 12,4 = 0,2(3,6x + 4,7)$

1	$G_1: 3x - 17 = 19$
●	$\rightarrow G_1: 3x - 17 = 19$
2	$G_2: G_1 + 17$
●	$\rightarrow G_2: 3x = 36$
3	$G_3: G_2 / 3$
●	$\rightarrow G_3: x = 12$

## M 2 Zahlenraten – Mit GeoGebra findest du jede Lösung!

Foto: picture-alliance/dpa



Albert Einstein

Ich suche zwei Zahlen  $a$  und  $b$ .  
Wenn ich  $4a - b$  rechne, erhalte ich  $-1$ . Wenn ich  $2a + 6b$  rechne, erhalte ich  $84$ .

### Aufgabe 1: Hilf Einstein!

Was Einstein über die beiden Zahlen  $a$  und  $b$  sagt, kannst du in zwei Gleichungen ausdrücken.

- a) Gib diese beiden Gleichungen als **G<sub>1</sub>** und **G<sub>2</sub>** in GeoGebra ein.
- b) Weise in GeoGebra dem Bezeichner **a** den Wert **3** zu und **b** den Wert **13**. Berechne die Terme **4a - b** und **2a + 6b**. Zeige Einstein, dass **a = 3** und **b = 13** die beiden Zahlen sind, die er sucht.
- c) Erzeuge in GeoGebra die Gleichung ...
- ... **G<sub>3</sub>**, indem du **G<sub>1</sub>** mit 7 multiplizierst. Zeige, dass  $a = 3$  und  $b = 13$  auch für **G<sub>3</sub>** die richtigen Zahlen sind.
- ... **G<sub>4</sub>**, indem du **G<sub>1</sub>** und **G<sub>2</sub>** addierst. Erfüllen  $a = 3$  und  $b = 13$  auch **G<sub>4</sub>**?
- ... **G<sub>5</sub>**, indem du das Dreifache von **G<sub>1</sub>** zu dem Fünffachen von **G<sub>2</sub>** addierst. Ist  $a = 3$  und  $b = 13$  Lösung von **G<sub>5</sub>**?
- d) Verändere die Gleichungen **G<sub>1</sub>** und **G<sub>2</sub>**. Du darfst sie wie im Aufgabenteil c) mit Zahlen multiplizieren, addieren oder subtrahieren.
- Ist  $a = 3$  und  $b = 13$  eine Lösung für jede neue Gleichung?

### Aufgabe 2: So löst du jedes Zahlenrätsel!

Schau dir die Abbildung rechts an. In den Zeilen 1 und 2 sind zwei Gleichungen eingegeben. Ab Zeile 3 werden die beiden Gleichungen so umgeformt, dass du die Lösung für  $b$  ablesen kannst.

- a) Gib in GeoGebra eine Gleichung **G<sub>6</sub>** ein. Schreibe dazu **G<sub>1</sub>** ab und trage anstelle von  $b$  die gefundene 3 ein. Setze die GeoGebra-Datei fort und finde die Lösung für die gesuchte Zahl  $a$ .
- b) Überlege, warum in Zeile 3 die Gleichung **G<sub>2</sub>** genau mit 6 multipliziert wird.

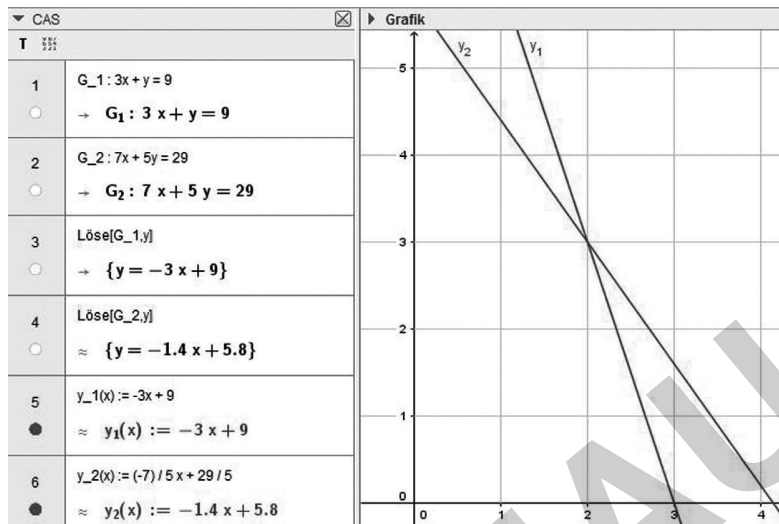
Finde mit demselben Verfahren die gesuchten Zahlen  $a$  und  $b$  für jeweils folgende zwei Gleichungen:

- c)  $-27a + 2b = 114$  und  $3a - 4b = -24$
- d)  $9a + 11b = 73$  und  $-3a - 17b = -91$
- e)  $6a + 5b = 47$  und  $3a + 2b = 20$
- f)  $13a + 7b = 1$  und  $5a + 17b = 29$

1	G <sub>1</sub> : $18a + b = -33$ → <b>G<sub>1</sub>: <math>18a + b = -33</math></b>
2	G <sub>2</sub> : $-3a + 3b = 15$ → <b>G<sub>2</sub>: <math>-3a + 3b = 15</math></b>
3	G <sub>3</sub> : $6G_2$ → <b>G<sub>3</sub>: <math>-18a + 18b = 90</math></b>
4	G <sub>4</sub> : $G_1 + G_3$ → <b>G<sub>4</sub>: <math>19b = 57</math></b>
5	G <sub>5</sub> : $G_4/19$ → <b>G<sub>5</sub>: <math>b = 3</math></b>



## M 4 Das Grafik-Fenster im CAS – Lösungen ablesen



### Aufgabe 1: Die Lösung im Diagramm finden

In dem GeoGebra-Dokument oben findest du ein Verfahren, um die Lösung für ein lineares Gleichungssystem zu bestimmen.

- a) Betrachte das GeoGebra-Dokument oben. Gib die Zahlen  $x$  und  $y$  an, die das Gleichungssystem lösen.

Wenn du das folgende Lösungsverfahren in GeoGebra anwendest, musst du nicht alle sechs Zeilen eingeben.

- b) Öffne in GeoGebra ein CAS- und ein Grafik-Fenster. Gib die Gleichungen **G\_1** und **G\_2** aus dem Dokument oben im CAS-Fenster ein. Schau in das Grafik-Fenster!

Du kannst dir im Grafik-Fenster die Koordinaten des Punktes anzeigen lassen, über dem sich der Mauszeiger befindet.

- c) Gehe dazu mit dem Mauszeiger in das Grafik-Fenster und klicke mit der rechten Maustaste. Es öffnet sich das Grafik-Kontextenü. Wähle den Befehl **Grafik...** ganz unten im Menü aus. Wähle anschließend den Registereintrag **Grundeinstellungen** und scrolle nach unten. Du findest dort die Option **Mauskoordinaten anzeigen**. Setze einen Haken in das Kästchen, indem du darauf klickst.

### Aufgabe 2: Gleichungssysteme grafisch lösen

#### Tipp



Die Menüleiste ändert sich, wenn du in das CAS- oder das Grafik-Fenster klickst. In der Grafik-Menüleiste findest du ein Icon mit zwei Doppelpfeilen (siehe rechts). Klickst du auf dieses Icon, kannst du die Grafik-Ansicht verschieben oder vergrößern.



Löse mit dem Verfahren aus Aufgabe 1 die folgenden Gleichungssysteme.

- a)  $2x - 3y = 5$  und  $10x + 7y = 3$       b)  $-3x + 6y = 0$  und  $9x - 12y = 2$   
c)  $3x + 2y = 5$  und  $-7x - 4y = -25$       d)  $3x + 2y = 9$  und  $6x + 4y = 7$

## M 6 Ratespaß – Rätsel mit Gleichungssystemen modellieren

### Aufgabe 1: Vater und Tochter

- a) Lies das GeoGebra-Dokument auf der rechten Seite.

**G<sub>1</sub>** lässt sich in Worten wie folgt ausdrücken:  
*Amelie und ihr Vater sind zusammen 59 Jahre alt.*

- b) Finde eine Formulierung für **G<sub>2</sub>**. Beginne mit den Worten: *Vor 12 Jahren ...*  
c) Bestimme mithilfe von GeoGebra das Alter von Amelie und ihrem Vater.

1	a ist das Alter von Amelie.
2	b ist das Alter von Amelies Vater.
3	G <sub>1</sub> : $a+b=59$ → <b>G<sub>1</sub>: <math>a + b = 59</math></b>
4	G <sub>2</sub> : $4(a-12)=b-12$ → <b>G<sub>2</sub>: <math>4a - 48 = b - 12</math></b>

### Aufgabe 2: Gleichungen in Worten formulieren

Formuliere jeweils die Gleichungen so wie in Aufgabe 1 mit Worten und berechne mit GeoGebra in allen Aufgaben das Alter der Personen.

- a)

a ist das Alter von Vincent.

b ist das Alter von Vincents Vater.

$$G_1: a+b=56$$

$$\rightarrow G_1: a + b = 56$$

$$G_2: 3(a+2)=b+2$$

$$\rightarrow G_2: 3a + 6 = b + 2$$

- b)

a ist das Alter von Annas Mutter.

b ist das Alter von Anna.

$$G_1: a+2=3b$$

$$\rightarrow G_1: a + 2 = 3b$$

$$G_2: 2(b+6)=a$$

$$\rightarrow G_2: 2b + 12 = a$$

- c)

a ist das Alter von Julius.

b ist das Alter von Julius Mutter.

$$G_1: 3(a+1)=b+1$$

$$\rightarrow G_1: 3a + 3 = b + 1$$

$$G_2: a+b=b+9$$

$$\rightarrow G_2: a + b = b + 9$$

### Aufgabe 3: Wie alt sind die beiden Geschwister?

Tina und Tom sind Geschwister. Zusammen sind die beiden 34 Jahre alt. Vor 11 Jahren war Tina doppelt so alt wie Tom.

- a) Starte ein neues GeoGebra-Dokument. Gib zwei Textzeilen ein, in denen die Unbekannten eingeführt werden.  
b) Erstelle für die Aussagen in der Aufgabenstellung jeweils eine Gleichung.  
c) Bestimme das Alter von Tina und Tom durch geschickte Äquivalenzumformungen.

### Aufgabe 4: Ein Altersrätsel mit drei Personen

Eine Dame wird nach ihrem Alter gefragt. Ihre Antwort lautet: „Mit meiner Tochter bin ich zusammen 115 Jahre alt, mit meiner Enkelin zusammen 90 Jahre. Meine Enkelin und meine Tochter sind zusammen 51 Jahre alt.“

- a) Erstelle ein GeoGebra-Dokument und formuliere die drei Aussagen der Dame jeweils als mathematische Gleichung. Beginne dein Dokument wie in den Aufgaben oben mit Textzeilen, in denen die Unbekannten eingeführt werden.  
b) Bestimme das Alter der drei Personen mit dem **Löse**-Befehl.

I/G