Inhalt

Vorwort

Das vorliegende Trainingsbuch ist ein Nachschlage- und Übungswerk zur selbstständigen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung im Fach Mathematik der Haupt- und Realschule.
Alle wichtigen mathematischen Themen sind darin anschaulich und verständlich aufbereitet, allgemeine Begriffe, Regeln und Rechentechniken werden erklärt und mit Beispielaufgaben vorgerechnet. Zahlreiche Abbildungen und Skizzen helfen den Schülern zusätzlich, den Stoff zu erarbeiten. Damit können mathematische Inhalte von der 5. bis zur 10. Klasse wiederholt und gefestigt werden, um somit einen optimalen Schulabschluss im Fach Mathematik vorzubereiten.

Nach den jeweiligen Erklärungen zu den Unterthemen werden Übungsaufgaben angeboten, mit denen festgestellt werden kann, was bereits sicher gelernt worden ist. Durch die Lösungsangabe im hinteren Teil des Buches ist eine eigenständige Lösungskontrolle möglich.

Am Ende eines jeden Oberthemas folgt ein sogenannter „Bist du fit?“-Test. Die Ergebnisse zeigen, ob der gesamte Inhalt des Kapitels beherrscht wird. Dabei müssen nicht immer alle Aufgaben von den Schülerinnen und Schülern gerechnet werden. Sobald man merkt, dass man ein Thema verstanden hat, kann ein neues Kapitel geübt werden. Das Buch bietet auch viele Trainingsaufgaben zur Vernetzung von Themen, die in der Prüfung vorkommen können.

Die Aufgaben zu den einzelnen Themengebieten sind jeweils nach dem didaktischen Grundprinzip „vom Leichten zum Schweren“ aufgebaut. Gerade zu Beginn der Übungsphase ist es aus unserer Praxiserfahrung heraus sehr wichtig, den Schülerinnen und Schülern schnell Erfolgserlebnisse zu ermöglichen, um ihr Selbstvertrauen aufzubauen und mögliche Befürchtungen und Ängste vor der finalen Abschlussprüfung abzubauen.

Die Kapitel enthalten Prüfungsthemen für die Hauptschule (H) und für die Realschule (R): Bruchrechnung, Rationale Zahlen, Zuordnungen, Prozent- und Zinsrechnung, Diagramme, Winkel, Konstruieren, Flächeninhalt und Umfang, Terme, Lineare Gleichungen und Ungleichungen, lineare Gleichungssysteme, Potenzen und Wurzeln, Satz des Pythagoras, Oberfläche und Volumen, Binomische Formeln, Lineare Funktionen, Trigonometrie und Stochastik.

Das A und O für gute Ergebnisse wäre es zum Beispiel, wenn die Schüler feste Übungszeiten von rund 30 Minuten pro Tag einplanen und einmal in der Woche im Team mit Klassenkameraden an den Aufgaben und Themen arbeiten könnten.

Marco Bettner
Michael Körner

P.S.: Als Begleiter zum Nachschlagen sowohl in der Schule als auch zu Hause und in der Abschlussprüfung empfehlen wir die „Formelsammlung für die Haupt- und Realschule“ (Best. Nr.: 3008)

Zur Erinnerung
Begriffe und Regeln beim Rechnen

Rechenarten

Addition (+)

3	+	7	=	10
1. Summand		2. Summand		(Wert der) Summe

Subtraktion (–)

8	–	5	=	3
Minuend		Subtrahend		(Wert der) Differenz

Multiplikation (·)

5	·	4	=	20
1. Faktor		2. Faktor		(Wert des) Produkts

Division (:)

36	:	9	=	4
Dividend		Divisor		(Wert des) Quotienten

Rechenregeln

Rechenreihenfolge:
1. Klammern berechnen
2. Punktrechnung (· und :) vor Strichrechnung (+ und –)
3. Von links nach rechts rechnen

Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz)

$a + b = b + a$ $\quad$ $7 + 3 = 3 + 7$

$a \cdot b = b \cdot a$ $\quad$ $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$

Rundungsregeln

Abrunden
Die Stelle, auf die zu runden ist, bleibt unverändert, wenn die nachfolgende Ziffer eine 0, 1, 2, 3, 4 ist:
5,232 (auf Hundertstel) = 5,23

Aufrunden
Die Stelle, auf die zu runden ist, wird um 1 erhöht, wenn die nachfolgende Ziffer eine 5, 6, 7, 8, 9 ist:
4,736 (auf Hundertstel) = 4,74

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch …

2 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0, 2, 4, 6, 8 ist: 2 | 358, da 2 | 8
3 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist: 3 | 234, da 3 | 9
4 teilbar, wenn ihre beiden Endziffern eine Zahl darstellen, die durch 4 teilbar ist: 4 | 124, da 4 | 24
5 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist: 5 | 975
6 teilbar, wenn die Zahl durch 2 und 3 teilbar ist: 6 | 264, da 2 | 264 und 3 | 264
8 teilbar, wenn ihre drei Endziffern eine Zahl darstellen, die durch 8 teilbar ist: 8 | 1 248, da 8 | 248
9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist: 9 | 351, da 9 | 9
10 teilbar, wenn die letzte Ziffer eine 0 ist: 10 | 700
25 teilbar, wenn ihre beiden Endziffern eine Zahl darstellen, die durch 25 teilbar ist: 25 | 725, da 25 | 25

Quersumme

Die Quersumme einer Zahl wird berechnet, indem man die einzelnen Ziffern der Zahl addiert:
Quersumme von 18 569 = 1 + 8 + 5 + 6 + 9 = 29

Die Themen

1. Prüfungsthema Hauptschule: Bruchrechnung

Zahldarstellungen

a Zähler
– Bruchstrich
b Nenner, $b \neq 0$

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ heißt **echter Bruch**, wenn der Zähler a kleiner ist als der Nenner b: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$
Ein Bruch $\frac{a}{b}$ heißt **unechter Bruch**, wenn der Zähler a größer ist als der Nenner b: $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$
Gemischte Zahlen bestehen aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch: $3\frac{3}{4}, 5\frac{7}{8}, \ldots$

Gemischte Zahlen in unechte Brüche umwandeln

Beispiel
$5\frac{2}{7}$
Um den Zähler zu ermitteln, gehe wie folgt vor: Multipliziere die natürliche Zahl mit dem Nenner des Bruchs ($5 \cdot 7 = 35$) und addiere zu diesem Ergebnis den Zähler des Bruchs ($35 + 2 = 37$).
Für den unechten Bruch wird der Nenner der gemischten Zahl beibehalten. D. h.:
$5\frac{2}{7} = \frac{37}{7}$

Unechte Brüche in gemischte Zahlen umwandeln

Beispiel
$\frac{14}{3}$
Um die natürliche Zahl zu ermitteln, gehe wie folgt vor:
Überlege, wie oft der Nenner in den Zähler passt (die 3 passt 4-mal in die 14). Die natürliche Zahl ist demnach 4.
Um den Zähler des Bruches zu ermitteln, gehe wie folgt vor: Multipliziere die natürliche Zahl mit dem Nenner des unechten Bruchs ($4 \times 3 = 12$). Anschließend ziehe das Ergebnis von dem Zähler des unechten Bruchs ab ($14 - 12 = 2$). Dieses Ergebnis ist der Zähler der gemischten Zahl.
Für den Nenner der gemischten Zahl wird der Nenner des unechten Bruchs beibehalten. Also:
$\frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

Aufgabe 1

Wandle in einen unechten Bruch um.

a) $2\frac{1}{3}$ c) $12\frac{8}{9}$ e) $100\frac{2}{8}$
b) $5\frac{3}{4}$ d) $14\frac{3}{20}$

Aufgabe 2

Wandle in eine gemischte Zahl um.

a) $\frac{25}{4}$ c) $\frac{12}{11}$ e) $\frac{270}{20}$
b) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{23}{11}$

Brüche erweitern

Beispiel
$\frac{2}{3}$ mit 5 erweitern: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$;
$\frac{4}{9}$ mit 7 erweitern: $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{28}{63}$

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl c erweitert, indem Nenner **und** Zähler mit der Erweiterungszahl c ($c \neq 0$) multipliziert werden, also: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c}$. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

Brüche kürzen

Beispiel
$\frac{35}{40}$ mit 5 kürzen: $\frac{35}{40} = \frac{35 : 5}{40 : 5} = \frac{7}{8}$;
$\frac{72}{108}$ mit 12 kürzen: $\frac{72}{108} = \frac{72 : 12}{108 : 12} = \frac{6}{9}$

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl c gekürzt, indem Nenner **und** Zähler mit der Kürzungszahl c ($c \neq 0$) dividiert werden, also: $\frac{a : c}{b : c}$. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

Aufgabe 3

Kürze soweit wie möglich:
$\frac{4}{16}; \frac{14}{21}; \frac{36}{72}; \frac{8}{24}; \frac{48}{72}; \frac{12}{30}; \frac{20}{32}; \frac{800}{8\,000}$

Aufgabe 4

Erweitere die Brüche mit der in Klammer angegebenen Zahl: $\frac{3}{4}$ (6); $\frac{2}{7}$ (8); $\frac{5}{6}$ (11); $\frac{11}{15}$ (11); $\frac{3}{8}$ (10)

Aufgabe 5

Erweitere die Brüche, sodass alle den Nenner 36 haben:
$\frac{3}{4}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{11}{18}$

Brüche addieren und subtrahieren

Brüche mit gleichen Nennern

Beispiel

$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$; $\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5-1}{8} = \frac{4}{8}$

Um Brüche mit gleichen Nennern zu addieren bzw. zu subtrahieren, werden die Nenner der Brüche beibehalten und die Zähler addiert bzw. subtrahiert, also:
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

Brüche mit unterschiedlichen Nennern

Beispiel

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

$\frac{22}{6} - \frac{1}{2} = \frac{22}{6} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{22}{6} - \frac{3}{6} = \frac{22-3}{6} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$

Um Brüche mit unterschiedlichen Nennern zu addieren bzw. subtrahieren, müssen sie zunächst durch Erweitern oder Kürzen auf den gleichen Nenner gebracht werden. Danach werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert. Der Nenner wird beibehalten.

Aufgabe 6

Berechne.

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$

c) $3\frac{1}{8} + 2\frac{3}{8}$

d) $\frac{11}{20} - \frac{10}{20}$

e) $\frac{27}{8} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{5}{12} - \frac{3}{4}$

f) $5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{4}$

Aufgabe 7

Steffi will eine Bowle machen. Dem Rezept entnimmt sie: $\frac{3}{6}$ l Apfelsinensaft, $\frac{1}{2}$ l Orangensaft, $\frac{3}{8}$ l Himbeersaft und $\frac{1}{4}$ l Kirschsaft. Wie viel Liter Bowle erhält Steffi insgesamt?

Aufgabe 8

In einer Flasche sind $\frac{9}{10}$ l Wasser. Es werden ein $\frac{1}{8}$-l-Glas und ein $\frac{1}{4}$-l-Glas befüllt. Wie viel Liter Wasser wurden ausgeschenkt und wie viel Liter Wasser befinden sich noch in der Flasche?

Brüche multiplizieren

Beispiel

$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem die beiden Nenner und die beiden Zähler miteinander multipliziert werden.

Brüche dividieren

Beispiel

$\frac{3}{8} : \frac{5}{7} = \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{40}$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert (Zähler und Nenner vertauschen) multipliziert.

Aufgabe 9

Berechne.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{20}$

c) $\frac{2}{6} : \frac{6}{5}$

d) $\frac{5}{12} : \frac{15}{36}$

e) $3\frac{1}{4} \cdot 6\frac{7}{8}$

Aufgabe 10

Jonas möchte sich einen Roller für 1 452 € kaufen. Er hat schon $\frac{2}{3}$ dieses Betrages gespart. Wie viel Euro sind das?

Aufgabe 11

Anita hat $2\frac{1}{2}$ l Saft. Sie verteilt ihn auf $\frac{1}{4}$-l-Gläser. Wie viele Gläser kann sie füllen?

Dezimalbrüche addieren und subtrahieren

Beispiel

2,8 + 4,3

$$\begin{array}{cccc} & 2 & , & 8 \\ + & 4 & , & 3 \\ & {\scriptstyle 1} & & \\ \hline & 7 & , & 1 \\ \hline\hline \end{array}$$

1. Prüfungsthema Hauptschule: Terme

Termwerte berechnen

Den Wert eines Terms mit Variable (hier x) kann man erst berechnen, nachdem man für die Variable Zahlen eingesetzt hat.

Beispiel

a) $3x + 5$
Termwert berechnen für $x = 7$
$3 \cdot 7 + 5 =$
$21 + 5 = 26$

b) $4 \cdot x^2 + 5 \cdot (10 - x)$
Termwert berechnen für $x = 8$
$4 \cdot 8^2 + 5 \cdot (10 - 8) =$
$4 \cdot 64 + 5 \cdot 2 =$
$256 + 10 = 266$

Um den Wert eines Terms zu berechnen, setzt man für die Variablen Zahlen ein. Beachte dabei folgende Regeln über die Rechenreihenfolge:

1. Inneres einer Klammer berechnen
2. Potenzrechnung vor Punktrechnung
3. Punktrechnung vor Strichrechnung
4. Von links nach rechts rechnen

Aufgabe 1

Berechne die Termwerte.
a) $2x + 7$ ($x = 3$; $x = 1$; $x = 0$)
b) $19 - 4a + 7$ ($a = 6$; $a = 1{,}5$; $a = -3$)
c) $4(y + 3 \cdot 9) - 11$ ($y = 20$; $y = \frac{1}{4}$; $y = 1$)
d) $2b + 7b + 4 \cdot b^2$ ($b = 3$; $b = 5{,}2$; $b = -2$)

Terme zusammenfassen: Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsregel

Beispiel

a) $3x + 4x + 5x = 12x$
b) $3 \cdot 5a + 7 = 15a + 7$
c) $3a \cdot 4b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 12ab$
d) $8x + 7y - 4x + 3y = 8x - 4x + 7y + 3y = 4x + 10y$

Um einen Term zu vereinfachen bzw. zusammenzufassen gelten folgende Regeln:
– Gleiche Glieder dürfen zusammengefasst werden (Bsp. a)).
– Produkte (·) und Quotienten (:) dürfen durch entsprechendes Ausrechnen vereinfacht werden (Bsp. b), c)).
– Kommen in einem Term verschiedene Variabeln vor, so wird zunächst geordnet und dann zusammengefasst. Die Rechenzeichen vor den einzelnen Gliedern sind dabei besonders zu beachten (Bsp. d)).

Aufgabe 2

Fasse die Terme zusammen.
a) $4x + 5x$
b) $a + b + c + a + b + c$
c) $xy + xy + xy - xy$
d) $24s + 4q - 6s - q$
e) $250bc - 40ad + 180bc + 80adc$
f) $4{,}2y + 3{,}6 - 3{,}9y$
g) $4 \cdot 8y$
h) $\frac{1}{4}x \cdot 8$
i) $4x \cdot 3 - 5x \cdot y - 6x \cdot 3 + xy \cdot 5$

Klammerausdrücke vereinfachen

Plusklammer

Beispiel
$5z + (4x - 3) = 5z + 4x - 3$

Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen, so heißt die Klammer „Plusklammer“. Sie kann ohne Veränderung weggelassen werden.

Minusklammer

Beispiel
$5y - (5x - 4) = 5y - 5x + 4$ $\qquad -(x + 3) = -x - 3$

Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so heißt die Klammer „Minusklammer“. Löst man eine Minusklammer auf, muss man die Rechenoperation im Inneren der Klammer durch die Gegenoperation ersetzen.

Aufgabe 3

Löse die Klammern auf.
a) $-(x + 5)$
b) $8z + (4x - 3z - 5)$
c) $-(-3m - 4s)$
d) $17y - (28xy - 5y)$

Das Verteilungsgesetz

Beispiel
$7 \cdot (y + 3) = 7 \cdot y + 7 \cdot 3 = 7y + 21$
$3 \cdot (x - 5) = 3 \cdot x - 3 \cdot 5 = 3x - 15$

Steht außerhalb der Klammer ein Faktor, so wird beim Auflösen der Klammer jedes Glied in der Klammer mit dem

Aufgabe 4

Löse die Klammern auf.

a) $4(x + 6)$ c) $9(y - 4)$
b) $(a + 4b)5$ d) $1{,}5(f + 12 - 9)$

Summen multiplizieren (Klammer mal Klammer)

Beispiel

$(3x + 2)$	$\cdot$	$(6a + 5)$	$= 3x \cdot 6a + 3x \cdot 5 + 2 \cdot 6a + 2 \cdot 5 = 18ax + 15x + 12a + 10$
1. Summe		2. Summe	

Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der 1. Summe mit jedem Summanden der 2. Summe multipliziert.
Wenn Differenzen vorkommen, müssen die Vorzeichenregeln der Multiplikation (vgl. S. 12) beachtet werden:

$(4x + 3)$	$\cdot$	$(7 - 2y)$	$= 4x \cdot 7 - 4x \cdot 2y + 3 \cdot 7 - 3 \cdot 2y = 28xy - 8xy + 21 - 6y$
Summe		Differenz	

Aufgabe 5

Löse die Klammern auf.

a) $(11 + a)\ (2 + b)$
b) $(113 - 2y)\ (4 - y)$
c) $(6w - 5r)\ (4a + 2b)$

Bist du fit? Teste dein Wissen!

Aufgabe 1

Berechne die Termwerte.

a	b	$6a - 2b$	$-2(a + 4b)$	$b^2 - 12$	$5a^2 + 0{,}5a$
1	2				
4	18				
–5	12				
3,2	–2,6				

Aufgabe 2

Fasse zusammen.

a) $3x \cdot 2 + 5x \cdot 3 + 2x + 3x \cdot 3$
b) $4x \cdot 3 - 3a \cdot 2 - x \cdot 5 + a \cdot 7$
c) $4b \cdot 2 + \frac{8b}{4}$
d) $10a - (5b + 2b)$
e) $2a + 5 \cdot (a + 6) - 4$
f) $(1 + x)\ (3 - x)$

Aufgabe 3

Ein Quadratmeter Badfliesen kostet 14 €.

a) Stelle einen Term auf, aus dem man den Preis (y) in Abhängigkeit von der Quadratmetergröße (x) berechnen kann.
b) Berechne mithilfe des Terms den Preis für 14 m², 25 m²; 35,6 m² und 40 m².

Aufgabe 4

Bei der Firma „Rent a Car“ kostet das Ausleihen eines Autos pro Tag 40 €. Pro gefahrenen Kilometer werden zusätzlich 0,20 Cent berechnet.

a) Stelle einen Term auf, aus dem man den Ausleihpreis für x Tage und für eine gesamt gefahrene Strecke von y Kilometern berechnen kann.
b) Frau Müller hat das Auto 3 Tage ausgeliehen und ist dabei insgesamt 840 km gefahren. Wie viel Euro muss Frau Müller bezahlen?

2. Prüfungsthema Haupt- und Realschule: Zuordnungen (H)

Proportionale Zuordnungen

Beispiel
In einem Sonderverkauf kosten 8 Pullis 72 €.
a) Wie viel Euro kosten 5 Pullis?

	Anzahl	Preis (€)	
: 8	8	72	: 8
· 5	1	9	· 5
	5	45	

b) Wie viel Euro kosten 6 Pullis?

	Anzahl	Preis (€)	
: 8	8	72	: 8
· 6	1	9	· 6
	6	54	

Eine Zuordnung heißt proportional, …
(1) wenn zum Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen … der Ausgangsgröße auch das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache … der zugeordneten Größe gehört. **Es gilt:** Je mehr von der Ausgangsgröße, desto mehr von der zugeordneten Größe.
(2) wenn zu der Hälfte, einem Drittel, einem Viertel … der Ausgangsgröße auch die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel … der zugeordneten Größe gehört. **Es gilt:** Je weniger von der Ausgangsgröße, desto weniger von der zugeordneten Größe.
Proportionale Zuordnungen löst man mithilfe des **Dreisatzes:** Man schließt auf die Einheit durch Dividieren (:), dann auf das Vielfache durch Multiplizieren (·). Auf beiden Seiten muss immer dieselbe Rechenoperation durchgeführt werden.

Aufgabe 1

Vervollständige die Tabelle:

Gefahrene Strecke (km)	300	50			150		600
Verbrauch (l)	24		8	2		18	

Aufgabe 2

Die Klasse 8H (28 Schüler) bezahlt für 5 Tage Aufenthalt in einer Jugendherberge insgesamt 1 400 €.
a) Wie viel muss die Klasse 9H (25 Schüler) für die gleiche Zeit bezahlen?
b) Wie viel muss die Klasse 8R (28 Schüler) für 7 Tage Aufenthalt bezahlen?

Antiproportionale Zuordnungen

Beispiel
Um den Rohbau eines Hauses zu mauern, brauchen 9 Maurer 12 Tage.
a) Wie lange brauchen 6 Maurer?

	Anzahl	Tage	
: 9	9	12	· 9
· 6	1	108	: 6
	6	18	

b) Wie lange brauchen 12 Maurer?

	Anzahl	Tage	
: 9	9	12	· 9
· 12	1	108	: 12
	12	9	

Eine Zuordnung heißt antiproportional, wenn …
(1) zum Doppelten, dem Dreifachen, dem Vierfachen … der Ausgangsgröße die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel der zugeordneten Größe gehört. **Es gilt:** Je mehr von der Ausgangsgröße, desto weniger von der zugeordneten Größe.
(2) zur Hälfte, einem Drittel, einem Viertel … der Ausgangsgröße das Doppelte, das Dreifache, das Vierfache … der zugeordneten Größe gehört. **Es gilt:** Je weniger von der Ausgangsgröße, desto mehr von der zugeordneten Größe.
Antiproportionale Zuordnungen löst man mithilfe des **Dreisatzes** (siehe oben): Man schließt auf die Einheit durch Multiplizieren (·), dann auf das Vielfache durch Dividieren (:). Auf den beiden Seiten werden jeweils die gegenteiligen Rechenoperationen durchgeführt.

3. Prüfungsthema Realschule: Lineare Gleichungssysteme (R)

Lineare Gleichungen mit **zwei Variablen** kann man mit unterschiedlichen Verfahren lösen:

Das Gleichsetzungsverfahren

1. Löse beide Gleichungen nach derselben Variablen auf.
2. Setze die beiden Ausdrücke für die Variable, nach der du aufgelöst hast, gleich. Dadurch erhältst du eine Gleichung mit nur einer Variablen.
   Bestimme die Lösungsmenge dieser neuen Gleichung.
3. Setze das Ergebnis in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und ermittle den Wert der anderen Variablen.

Beispiel

(1) $3y + 5 = 4y + 3x \quad | -3y; -3x$
(2) $18 + 6x = 2y - 16 \quad | +16; :2$

(1') $5 - 3x = y$
(2') $17 + 3x = y$

Gleichsetzen von (1') und (2'):
$5 - 3x = 17 + 3x \quad | +3x; -17; :6$
$x = -2$

Einsetzen in (1):
$3y + 5 = 4y + 3 \cdot (-2)$
$y = 11$

Aufgabe 1

Bestimme die Lösungsmenge mit dem Gleichsetzungsverfahren!

a) $y = -3x + 16$
   $y = 2x + 6$

b) $y = 7 - x$
   $y = x - 3$

c) $3 + 2a = b$
   $3b - 2a = -2$

d) $0{,}25x + 2y = 4{,}5$
   $-0{,}5x - 4y = 9$

Das Einsetzungsverfahren

1. Löse eine der Gleichungen nach einer Variablen auf.
2. Ersetze in der zweiten Gleichung die Variable durch den Term, der nun auf der anderen Seite der ersten Gleichung steht. Dadurch erhältst du eine Gleichung mit nur einer Variablen.
   Bestimme die Lösungsmenge für diese Variable.
3. Setze das Ergebnis in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein und ermittle den Wert der anderen Variablen.

Beispiel

(1) $4b + 4a = 24$
(2) $2b - 8 = -2 - 10a \quad | +8; :2$

(1) $4b + 4a = 24$
(2') $b = 3 - 5a$

Einsetzen von (2') in (1):
$4(3 - 5a) + 4a = 24$
$a = -\frac{3}{4}$

Einsetzen in (2):
$2b - 8 = -2 - 10 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$
$b = 6\frac{3}{4}$

Aufgabe 2

Bestimme die Lösungsmenge mit dem Einsetzungsverfahren!

a) $4b + a = 24$
   $b = 6 - 10a$

b) $s = 2t - 4$
   $s + 9 = 3t$

c) $2b + 3 = 4a$
   $2b = 5a - 1$

d) $2y = 4x - 4$
   $12x + 4y = 22$

Das Additionsverfahren

Wenn in beiden Gleichungen eine Variable oder ein Vielfaches davon mit demselben Betrag, aber unterschiedlichen Vorzeichen vorkommt, ist es sinnvoll, das Additionsverfahren anzuwenden. Folgende Schritte sind hier zu beachten:

1. Forme beide Gleichungen durch Multiplikation/Division so um, dass beim Addieren der Gleichungen eine Variable wegfällt.
2. Addiere nun die beiden Gleichungen. Dadurch erhältst du eine Gleichung mit einer Variablen. Bestimme die Lösungsmenge für diese Variable.
3. Setze das Ergebnis in eine der Ausgangsgleichungen ein und ermittle die Größe der anderen Variablen.

Beispiel

(1) $4a - 3b = 7 \quad | \cdot 2$
(2) $-3a + 6b = 6$

(1') $8a - 6b = 14$
(2) $-3a + 6b = 6$

Gleichungen (1') und (2) addieren:
$8a - 6b - 3a + 6b = 14 + 6 \quad | \text{T}$
$5a = 20$
$a = 4$

Einsetzen in (1):
$4 \cdot 4 - 3b = 7$
$b = 3$

Aufgabe 3

Bestimme die Lösungsmenge mit dem Additionsverfahren.

a) $6a - 8b = 3$
$12a + 8b = 42$

b) $-5x + 6y = 16$
$5x - y = 14$

c) $2x + 8y = 32$
$7x + 4y = 40$

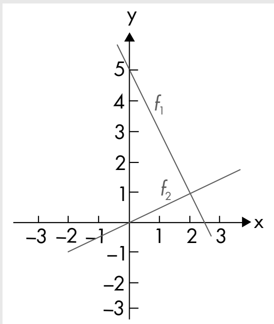
d) $2b = 4a - 4$
$3a + b = 5{,}5$

Zeichnerisches Lösungsverfahren

1. Löse zunächst beide Gleichungen nach y auf.
2. Zeichne für beide Gleichungen den Funktionsgraphen (vgl. S. 74).
3. Die Koordinaten des Schnittpunktes S $(x; y)$ der beiden Geraden sind die Lösung für das lineare Gleichungssystem, hier (2; 1).

Beispiel

f_1: $y = -2x + 5$
f_2: $y = 0{,}5x$



Aufgabe 4

Löse das Gleichungssystem zeichnerisch.

a) $y = 2y - 3$
$y = -3x + 7$

b) $3x - y = 6$
$x - 3y = 6$

c) $2x + y = 6$
$3x + 2y = 8$

Aufgabe 5

Was passiert mit den beiden Funktionsgeraden, wenn das zugehörige lineare Gleichungssystem keine Lösung hat?

Bist du fit? Teste dein Wissen!

Aufgabe 1

Löse die Gleichungssysteme rechnerisch.

a) $-10x + 12y = 32$
$10x - 2y = 28$

b) $y = 2x - 9$
$8x + 6y = 46$

c) $6x + 3y = 15$
$y = 2x - 7$

d) $5y = 10x + 152$
$5y = 15x + 5$

e) $-3y = -6x + 6$
$-18x - 6y = -33$

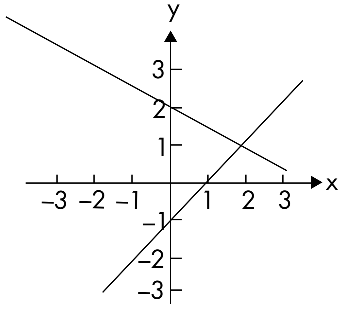
f) $y = 3x + 15$
$7x - 5 = 2y$

Aufgabe 2

Setze für a und b Werte ein, sodass das Gleichungssystem
$y = ax + b$
$y = 4x + 12$
a) keine Lösung hat.
b) unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe 3

Stelle zu den Funktionsgraphen das lineare Gleichungssystem auf und bestimme dessen Lösungsmenge.



Aufgabe 4

Löse die Gleichungssysteme zeichnerisch.

a) $y + x = 8$
$y + 2 = x$

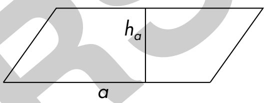
b) $y - 2 = \frac{1}{4}x$
$y = 1 + \frac{1}{3}x$

Aufgabe 5

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf und berechne die Lösungsmenge:
Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel um 7 cm größer als die Basis.
Wie groß sind die Schenkel und wie groß ist die Basis, wenn das Dreieck einen Umfang von 134 cm besitzt?

Aufgabe 6

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf und berechne die Lösungsmenge:
Ein Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 1 587 mm².
Die Seite a ist dreimal so lang wie die dazugehörige Höhe h_a.
Wie lang ist die Seite a und wie lang ist die Höhe h_a?



Aufgabe 7

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf und bestimme die Werte für x und y:
Das Fünffache einer Zahl x vermindert um 43 hat den Wert y.
116 vermindert um das Vierfache von y ist genauso groß wie das Vierfache von x.

3. Prüfungsthema Realschule: Quadratische Gleichungen (R)

Rein quadratische Gleichungen lösen

1. Gleichung der Form $x^2 = a$ und $ax^2 - c = b$
Durch Termumformung und Wurzelziehen ergeben sich zwei Lösungen:

$x^2 = a \quad |\sqrt{\ }$
$x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$

$ax^2 - c = b \quad | + c$
$ax^2 = b + c \quad | : a$
$x^2 = \frac{b+c}{a} \quad |\sqrt{\ }$
$x_1 = -\sqrt{\frac{b+c}{a}}$ und $x_2 = \sqrt{\frac{b+c}{a}}$

> **Beispiel**
> $x^2 = 144 \quad |\sqrt{\ }$
> $x_1 = 12$ und $x_2 = -12$
>
> $3x^2 - 13 = 2 \quad | + 13$
> $3x^2 = 15 \quad | : 3$
> $x^2 = 5 \quad |\sqrt{\ }$
>
> $x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$

2. Gleichung der Form $x^2 + 2ax + a^2 = c$ bzw. $(x + a)^2 = c$
Mithilfe der 1. und 2. binomischen Formel und Wurzelziehen lassen sich diese Gleichungen lösen:

$x^2 + 2xa + a^2 = c \quad |$ 1. bin. Formel
$(x + a)^2 = c \quad |\sqrt{\ }$

$x + a = \sqrt{c}$ oder $x + a = -\sqrt{c} \quad | - a$
$x_1 = \sqrt{c} - a$ und $x_2 = -\sqrt{c} - a$

> **Beispiel**
> $x^2 + 10x + 25 = 400 \quad |$ 1. bin. Formel
> $(x + 5)^2 = 400 \quad |\sqrt{\ }$
>
> $x + 5 = 20$ oder $x + 5 = -20 \quad | - 5$
> $x_1 = 15$ und $x_2 = -25$

Aufgabe 1

Bestimme die Lösungsmenge.
a) $x^2 = 289$
b) $4x^2 = 576$
c) $-2b^2 = -100\,000 - 82$
d) $34 + 3x^2 = 52{,}75$
e) $13x^2 = 12$
f) $8x^2 - 25 = 146$
g) $a^2 = 306{,}25$
h) $65 - 4s^2 = 57$

Aufgabe 2

Bestimme die Lösungsmenge.
a) $(x + 8)^2 = 784$
b) $(x - 6)^2 = 49$
c) $(24 + b)^2 + 36 = 16\,670 + 7$
d) $3(x + 5)^2 = 2\,700$

Gemischt quadratische Gleichungen lösen

1. Gleichung der Form $x^2 + px = 0$
Gemischt quadratische Gleichungen ohne konstantes Glied (q, vgl. 2.) kannst du durch Ausklammern lösen:

$x^2 + px = 0 \quad |$ Ausklammern
$x(x + p) = 0 \quad |$ Überprüfen: welche Zahlen für x eingesetzt ergeben 0?

$x = 0$ oder $x + p = 0$
$x_1 = 0$ und $x_2 = -p$

> **Beispiel**
> $x^2 + 9x = 0 \quad |$ Ausklammern
> $x(x + 9) = 0$
>
> $x = 0$ oder $x + 9 = 0$
> $x_1 = 0$ und $x_2 = -9$

Aufgabe 3

Bestimme die Lösungsmenge.
a) $x^2 + 6x = 0$
b) $x^2 = 7x$
c) $3x^2 - 45x = 0$
d) $2{,}5x^2 = -30x$

2. Gleichung in der Normalform $x^2 + px + q = 0$ mithilfe der quadratischen Ergänzung lösen
Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ nennt man Normalform einer quadratischen Gleichung.
Mithilfe der quadratischen Ergänzung lassen sich Gleichungen in der Normalform in rein quadratische Gleichungen überführen.

> **Beispiel**
> $x^2 + 8x + 5 = 25 \quad | - 5$
> $x^2 + 8x = 20$
>
> Quadratische Ergänzung heißt nun, dass man den Term $x^2 + 8x$ (allgemein: $x^2 + px$) so erweitert, dass die 1. oder 2. binomische Formel (vgl. S. 73) entsteht. Dazu halbierst du p (hier also: $\frac{8}{2}$) und quadrierst diese Zahl (hier: $\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 4^2 = 16$):
>
> $x^2 + 8x = 20 \quad |$ Auf *beiden* Seiten die quadratische Ergänzung hinzufügen
> $x^2 + 8x + 16 = 20 + 16$
> $x^2 + 8x + 16 = 36 \quad |$ Anwenden der 1. bin. Formel
> $(x + 4)^2 = 36 \quad |\sqrt{\ }$
>
> $x + 4 = 6$ oder $x + 4 = -6 \quad | -4$
> $x_1 = 2$ und $x_2 = -10$

Beispiel (zu: „Durchschnittliche Fahrtzeit zur Arbeit (Pkw)“)

$$s^2 = \frac{(18-20)^2 + (22-20)^2 + (19-20)^2 + (21-20)^2 + (23-20)^2 + (17-20)^2}{6} = \frac{28}{6} = 4{,}7$$

$s = \sqrt{4{,}7} = 2{,}2$

Die Varianz beträgt 4,7 min^2 und die Standardabweichung 2,2 min.

Aufgabe 7

Bei den Bundesjugendspielen erzielte die Klasse 8H2 (20 Schüler) im Weitsprung folgende Ergebnisse:

2,90 m; 2,93 m; 2,93 m; 2,96 m; 2,98 m; 2,98 m; 3,00 m; 3,05 m; 3,15 m; 3,22 m;
3,25 m; 3,30 m; 3,30 m; 3,56 m; 3,58 m; 3,65 m; 3,66 m; 3,72 m; 3,80 m; 4,01 m.

a) Gib den Mittelwert an.
b) Gib die Varianz an.
c) Gib die Standardabweichung an.

Bist du fit? Teste dein Wissen!

Aufgabe 1

Aus einem Kartenspiel (32 Karten, je 8-mal Karo, Herz, Pik, Kreuz von „7“ bis „Ass“) werden nacheinander zwei Karten (ohne Zurücklegen) gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der gezogenen Karten eine Pikkarte ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zwei Asse zieht?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gezogenen Karten 21 ergibt (Ass zählt 11)?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gezogenen Karten weniger als 11 Punkte ergibt?
e) Man gewinnt, wenn eine der gezogenen Karten entweder eine Bildkarte oder eine Herzkarte ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man?

Aufgabe 2

In einer Urne befinden sich fünf blaue, vier rote und drei gelbe Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln gezogen und wieder zurückgelegt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei gezogenen Kugeln blau sind?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei gezogenen Kugeln gelb sind?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei gezogenen Kugeln unterschiedliche Farben haben?

Aufgabe 3

Bei der Füllung von Getränkekartons (1 000 ml) darf die Standardabweichung nicht größer als 6 sein. Bei der Firma Muhl wurden aus der laufenden Produktion 10 Getränkekartons entnommen und folgende Füllmengen festgestellt:

1 000 ml; 990 ml; 1 004 ml, 995 ml; 992 ml; 1 006 ml; 989 ml; 1 007 ml; 999 ml; 998 ml

a) Wie viel Milliliter wurden im Durchschnitt pro Flasche abgefüllt?
b) Berechne die Standardabweichung bei der Abfüllung.
c) Muss die Maschine neu eingestellt werden?

Aufgabe 4

Ein Pkw wird von verschiedenen Fahrern auf den Benzinverbrauch (Verbrauch auf 100 km) im Stadtverkehr getestet:

Person	A	B	C	D	E	G
Verbrauch in (l)	8,8	9,2	10,1	9,5	10,5	9,8

a) Berechne das arithmetische Mittel.
b) Berechne Varianz und Standardabweichung.
c) Was könnten Gründe für den unterschiedlichen Benzinverbrauch sein?