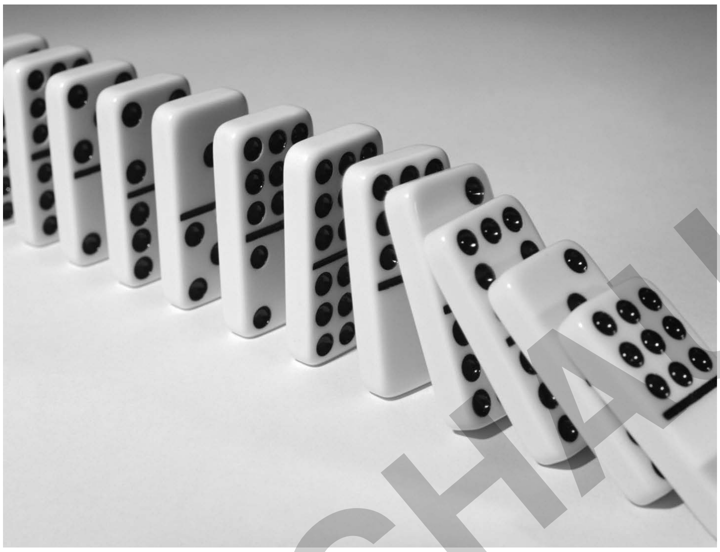
Mit vollständiger Induktion mathematische Muster beweisen

Dr. Heinrich Schneider, Wien, Prof. Dr. Florian Schacht, Essen



Wenn der erste Dominostein fällt und durch jeden fallenden Dominostein der nächste umgestoßen wird, so wird schließlich jeder Dominostein der unendlich lang gedachten Kette irgendwann umfallen.

Klasse: 10–12

Dauer: 4–6 Stunden

Inhalt Prinzip der vollständigen Induktion; Nutzung von Repräsentationswechseln; Vielfältige Aufgaben zum Üben

Ihr Plus

- ✓ Aufgaben- und Lösungskartei zur differenzierenden Gestaltung des Lernprozesses
- ✓ Hoher Grad an Schüleraktivität
- ✓ Wechsel der Repräsentationsebenen und Arbeitsformen (Think, Pair, Share)
- ✓ Vielfalt an Begründungsvarianten (generisches Beispiel, generisches Bild und formal-algebraischer Beweis)

Für viele klingt ***Mathematisches Beweisen*** nach Formalismus, kryptischer Symbolik und einer Art höherer Kunst. Dabei können Beweise sehr anschaulich sein. Sie können durch geeignete Abbildungen visualisiert werden und in einer Sprache verfasst sein, die nicht notwendig an Formalismen hängt. Kurz: Das **Beweisen** ist eine der Kerntätigkeiten der Mathematik. Mit Beweisen können wir Muster und Strukturen verallgemeinern, wir können Zusammenhänge nicht nur beschreiben, sondern diese auch begründen.

Im Laufe der Geschichte haben sich in der Mathematik unterschiedliche Beweisprinzipien herausgebildet. Eine besonders reizvolle Beweisvariante ist die **vollständige Induktion**. Auch damit lassen sich mathematische Muster und Strukturen allgemein begründen. Thematisiert wird die vollständige Induktion in diesem Beitrag anhand generischer Beispiele, generischer Bilder und formal-algebraischer Beweise.

Didaktisch-methodische Hinweise

Wir alle haben uns an **Verallgemeinerungen** gewöhnt. Sie dienen uns zur Orientierung im Alltag.

Beispiele:

- Aller Anfang ist schwer.
- Jeder macht Fehler.
- Man kann niemandem trauen.

Manche solcher Aussagen haben eine statistische Berechtigung, ohne auf jeden Einzelfall anwendbar zu sein. Es gibt aber auch Verallgemeinerungen, die man beweisen kann. Darum geht es in diesem Beitrag.

Vollständige Induktion – Beweisen ist erlernbar!

Formalismus, kryptische Symbolik und eine Art höherer Kunst – viele Schüler finden nur schwer Zugang zu mathematischen Beweisen. Dabei können Beweise sehr anschaulich sein. Sie können durch geeignete Abbildungen visualisiert werden und in einer Sprache verfasst sein, die nicht notwendig an Formalismen hängt. Kurz: Das Beweisen ist eine der **Kerntätigkeiten der Mathematik**. Mit Beweisen können wir Muster und Strukturen verallgemeinern, Zusammenhänge nicht nur beschreiben, sondern diese auch begründen. Die Mathematik kennt unterschiedliche Beweisprinzipien.

Eine besonders reizvolle Beweisvariante ist die **vollständige Induktion**. Auch damit lassen sich mathematische Muster und Strukturen allgemein begründen. Das Prinzip der vollständigen Induktion beruht auf der Idee, die Behauptung zunächst für einen überprüfbaren Fall $n = 0$ oder $n = 1$ zu zeigen und sie dann im Induktionsschritt von $n \rightarrow n + 1$ zu verallgemeinern. Für den Lernprozess Ihrer Schüler ergeben sich daraus viele Potentiale im Spannungsfeld von Kreativität und Schematisierung. Das meint, dass Begründungen, die das Prinzip der vollständigen Induktion nutzen, einerseits einer formalen Struktur unterliegen, angezeigt durch den **Induktionsanfang**, die **Induktionsvoraussetzung** und den **Induktionsschritt**. Gleichzeitig erfordern Induktionsbeweise viel Kreativität. Unterstützt werden die Beweisprozesse Ihrer Schüler mit den vorliegenden Materialien durch konsequente Repräsentationswechsel, durch die die zu begründenden Muster visualisiert werden können.

Lehrplanbezug

→ siehe separater Kasten unter der Verlaufsübersicht (Seite 5)

Aufbau des Beitrags

M 1 Mathematische Verallgemeinerungen beschreiben und begründen

Kerngedanke des Materials **M 1** ist neben der aktiven Erkundung mathematischer Muster und Strukturen insbesondere eine motivierende Hinführung zum Prinzip der vollständigen Induktion. Im Zentrum steht dabei zunächst die Erfahrung, dass mathematische Beweise unterschiedliche Gesichter haben – sei es verbal, grafisch oder symbolisch durch Nutzung allgemeiner Terme und Variablen. Mathematische Beweise stellen in besonderer Weise die Möglichkeit dar, Strukturen zu verallgemeinern und zu begründen. Dies geschieht hier zunächst anhand von **Dreieckszahlen**. Die Idee der ersten Aufgabe ist, dass Ihre Schüler eine möglichst geschickte Strategie nutzen, um hohe Dreieckszahlen zu bestimmen.

Dies führt dann zu der bekannten Formel für die n-te Dreieckszahl:

$$\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Anschaulich lässt sich dieser Term mit dem dargestellten Bild so in Verbindung bringen, dass durch geschicktes Anlegen eines zweiten Dreiecks ein Rechteck der Länge n und der Breite n + 1 entsteht. Die ursprüngliche Dreiecksform erhält man nun dadurch, dass man die Anzahl der Punkte wieder halbiert. Nehmen Sie sich gerade zu Beginn der Einheit im Unterricht die Zeit, unterschiedliche Strategien Ihrer Schüler zu diskutieren und zu vergleichen. Ihre Schüler erleben auf diese Weise die Kraft von Repräsentationswechseln: Die Terme bekommen eine Bedeutung, sie können mit dem Punktmuster identifiziert werden.

Diese erste Aufgabe dient einerseits dem motivierenden **Einstieg** in die Einheit. Gleichzeitig wird sie dann in der Aufgabenkartei wieder aufgegriffen (u. a. in **M 4**, Aufgaben 1 und 2).

Die dann folgende Aufgabe, **Muster in Zahlenfolgen**, führt hin zum Gegenstandsbereich der vollständigen Induktion. Die abgebildete **Selbstkontrolle** sollten Ihre Schüler erst dann nutzen, wenn sie sich intensiv mit den mathematischen Beispielen auseinandergesetzt haben. Auch mit dem anschließenden Beweis zur ersten Aussage sollten sich Ihre Schüler ausgiebig beschäftigen. Hier vollziehen sie dann in einer Aufgabe selbst den Repräsentationswechsel in umgekehrter Richtung, indem sie den Beweisschritt mithilfe des Punktbildes visualisieren.

M 2 und M 3 Begriffsbestimmung zur vollständigen Induktion

Im Rahmen des Informationstextes erarbeiten sich Ihre Schüler das Prinzip der vollständigen Induktion. Die unterschiedlichen Beispiele verdeutlichen das Prinzip selbst. Darüber hinaus bieten sie auch vielfältige Hilfen an, die die Schüler bei der Bearbeitung der Aufgabenkartei in **M 4** nutzen. Insbesondere die Partnerarbeit in **M 3** regt Ihre Schüler dazu an, eigene Muster in Zahlenfolgen zu finden und diese dann – mittels vollständiger Induktion – zu begründen. Auch bei dieser Aufgabe wird ein konsequenter Repräsentationswechsel genutzt.

M 4 Aufgabenkartei und Lösungskartei

Diese Materialien stellen einen umfangreichen **Aufgabenpool für differenzierendes Üben** in Ihrem Unterricht bereit. Die Niveaudifferenzierung gelingt einerseits dadurch, dass die Schüler je nach Geschwindigkeit und Leistungsstärke unterschiedlich viele Aufgaben selbstständig bearbeiten können. Andererseits bietet die Aufgabenkartei durchaus thematisch vielfältige Aufgaben, etwa

– zu konkreten Begründungen mathematischer Zusammenhänge mittels vollständiger Induktion,
– zur Nutzung des Repräsentationswechsels,
– zum Vergleich unterschiedlicher Aufgaben der Kartei sowie zur Begründung und Herleitung der jeweiligen Terme.

Für die praktische Umsetzung im Unterricht empfiehlt es sich, die **Karteikarten** – etwa in fünffacher Ausführung zu kopieren, zu laminieren und zurechtzuschneiden. Auch die **Lösungskartei** sollten Sie entsprechend kopieren und laminieren – wobei für die Umsetzung ein Zurechtschneiden der Aufgaben nicht notwendig ist. Ihre Schüler können dann unterschiedliche Aufgaben aus der Kartei bearbeiten und anschließend die Lösungen auf der Lösungskarte, die zentral an einer Stelle des Klassenzimmers ausliegt, einsehen und vergleichen. Genauere **Tipps zur praktischen Umsetzung** in Ihrem Unterricht sind im Erläuterungsteil am Ende des Beitrages enthalten.

Bezug zu den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz

Allg. mathematische Kompetenz	Leitidee	Inhaltsbezogene Kompetenzen Die Schüler...	Anforderungsbereich
K 1	L 1	... formulieren typisch mathematische Fragen und stellen begründete Vermutungen auf (**M 1–M 4**), ... verändern mathematische Objekte und erkunden Strukturinvarianzen (**M 1, M 4**), ... argumentieren in arithmetischen Kontexten (**M 1–M 4**), ... beschreiben und begründen arithmetische Beziehungen (**M 1–M 4**),	I, II II II, III I, II, III
K 2	L 1	... nutzen unterschiedliche Strategien der Argumentation und Beschreibung (**M 1, M 4**), ... kontrollieren die Plausibilität der selbst gewählten Begründungsvarianten (Lösungskartei zu **M 4**),	I, II II, III
K 4, K 6	L 1	... kommunizieren (in Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit) Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen von Zahlen- und Bildmustern (**M 1, M 3, M 4**),	I, II, III
K 5	L 1	... nutzen Variablen, Terme, Gleichungen sowie Punktmuster und generische Beispiele zur Explizierung und Begründung von (arithmetischen) Mustern (**M 1, M 3, M 4**), ... nutzen unterschiedlichste sprachliche Elemente (symbolisch, formal, grafisch und natürliche Sprache) zur Beschreibung und Begründung von Mustern (**M 1–M 4**).	I, II, III I, II, III

Abkürzungen

Kompetenzen

K 1 (Mathematisch argumentieren); K 2 (Probleme mathematisch lösen); K 3 (Mathematisch modellieren); K 4 (Mathematische Darstellungen verwenden); K 5 (Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen); K 6 (Kommunizieren)

Leitideen

L 1 (Algorithmus und Zahl); L 2 (Messen und Größen); L 3 (Raum und Form); L 4 (Funktionaler Zusammenhang); L 5 (Daten und Zufall)

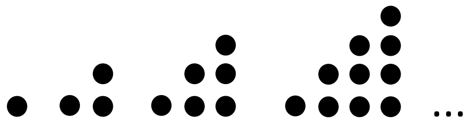
Anforderungsbereiche

I Reproduzieren; II Zusammenhänge herstellen; III Verallgemeinern und Reflektieren

M 1 Mathematische Verallgemeinerungen kennenlernen

Muster in Punktbildern (Einzelarbeit)

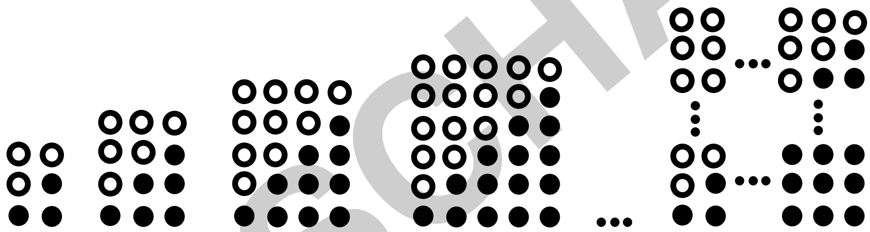
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte zunächst im 5. Bild, dann im 6. Bild und im 10. Bild.



b) Finden Sie eine geschickte Möglichkeit, möglichst schnell die Punkte im 100. Bild zu bestimmen.

c) Begründen Sie, wie sich mithilfe der folgenden Abbildung der allgemeine Term zur Bestimmung der Punkte im n-ten Bild herleiten lässt:

$\Delta_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.



Tandembogen: Muster in Zahlenfolgen

Stellen Sie den Tandembogen in der Mitte zwischen sich und Ihrem Partner auf. Einer löst die Aufgaben, der andere kontrolliert die Lösung. Wer welche Aufgabe übernimmt, entscheiden Sie durch Würfeln. Wer als erster eine Sechs würfelt, prüft die Lösungen.

Drei Beispiele:

Setzen Sie fort! Was fällt Ihnen auf?

a) $1 = 1$; $1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ (Beispiel 1)

b) $1^2 + 1 + 5 = 7$; $2^2 + 2 + 5 = 11$; $3^2 + 3 + 5 = 17$; $4^2 + 4 + 5 = 25$ (Beispiel 2)

c) $2 > 1$; $4 > 2$; $8 > 3$; $16 > 4$ (Beispiel 3)

Hier knicken

Lösungen Ihres Partners:

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, stets eine Quadratzahl

b) $5^2 + 5 + 5 = 35$, stets eine ungerade Zahl, nicht immer eine Primzahl

c) $32 > 5$, stets eine wahre Aussage

II/F

Partnerarbeit: Verallgemeinerung

1. Machen Sie sich – zusammen mit Ihrem Partner – die Verallgemeinerungen der Aussagen auf dem Tandembogen klar.

   Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, gilt:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, wobei $2n-1$ der n-te Summand ist.

b) $n^2 + n + 5$ ist eine ungerade Zahl

c) $2^n > n$

Tipp **zu b)** Es gibt $n \in \mathbb{N}$, für die $n^2 + n + 5$

– eine **Primzahl** (eine natürliche Zahl, die größer als 1 und ausschließlich durch sich selbst und durch 1 ganzzahlig teilbar ist) ist

  und $n \in \mathbb{N}$, für die $n^2 + n + 5$

– eine **zusammengesetzte Zahl** (eine natürliche Zahl, deren Primfaktorzerlegung mindestens zwei verschiedene Primzahlen oder eine Primzahl mehrfach enthält) ist.

2. Beweise: Machen Sie sich – zusammen mit Ihrem Partner – die Beweise klar.

Beweis zu a)

$$\begin{array}{ccccc}
1\ + & 3\ + & 5\ + \ldots + & (2n-1)\ + & \\
(2n-1)\ + & (2n-3)\ + & (2n-5)\ + \ldots + & 1 & \\
\hline
= 2n\ + & 2n\ + & 2n\ + \ldots + & 2n & = n \cdot 2n = 2n^2
\end{array}$$

Also ist die gesuchte Summe gleich n^2.

Auftrag: Visualisieren Sie diesen Beweisschritt mithilfe eines Punktbildes.

Beweis zu b)

$n^2+n+5=\underbrace{n(n+1)}_{\text{gerade}}+5$ ist eine ungerade Zahl, da die Summe einer geraden und ungeraden Zahl stets ungerade ist. Insbesondere ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender Zahlen stets gerade.

$n^2 + n + 5$ prim für 1, 2, 3, 6, 7 und andere Zahlen,

zusammengesetzt für n = 4, 5, 8, 9, 10 und andere.

Beweis zu c)

$2^1 > 1$. Die Aussage ist also wahr für n = 1.

Angenommen, $2^n > n$ gilt für ein beliebiges n.

Wir versuchen zu zeigen, dass dann auch gilt: $2^{n+1} > n + 1$.

$2^n > n \mid \cdot 2 \Rightarrow 2^{n+1} > 2n = n + n \geq n + 1$ wzbw.

Diese Vorgehensweise beim dritten Beispiel heißt **vollständige Induktion**.

II/F

M 4 Üben, üben, üben – Aufgabenkartei (Teil 1)

①

Aufgabe 1

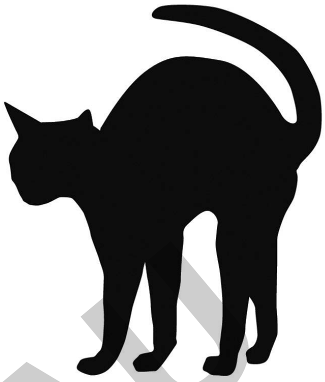
$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Aufgabe 2

Wie kommt man in Aufgabe 1 auf den Ausdruck:

$\frac{1}{2}n(n+1)$?

Stellen Sie Ihre Lösung auch grafisch mithilfe eines Punktbildes dar und verdeutlichen Sie daran Ihre Lösung.



Gruppe „Katze"

© iStock/Thinkstock

Aufgabe 3

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$$

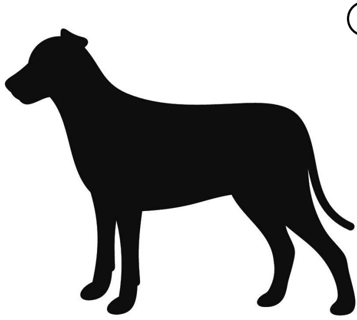
Aufgabe 4

$$1+5+9+\ldots+(4n-3) = n(2n-1)$$

②

Aufgabe 5

$$1+3+6+\ldots+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$



Gruppe „Hund"

© iStock/Thinkstock

Aufgabe 6

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Aufgabe 7

Vergleichen Sie Aufgabe 5 mit Aufgabe 6.

Aufgabe 8

$$1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+(2n-1)\cdot 2n = \frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)$$

II/F

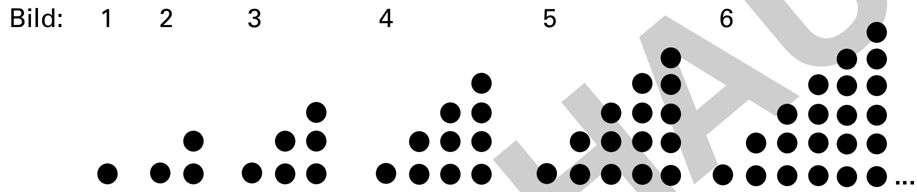
Lösungen und Tipps zum Einsatz

M 1 Mathematische Verallgemeinerungen kennenlernen

In dieser offenen Erkundungsphase arbeiten Ihre Schüler mit verschiedenartigen Mustern und Strukturen – sowohl in **Zahlenfolgen** als auch in **Punktbildern**. Motivieren Sie die Lernenden, unterschiedliche Varianten für die Bestimmung hoher Stellen der Punktbilder zu finden. Gerade für solche hohen Stellen führen Sie den Übergang von rekursiver hin zu expliziter Betrachtung solcher Musterfolgen ein. Diese explizite Betrachtung erfordert das Suchen nach Strukturen, die im nächsten Schritt begründet werden müssen – etwa mittels vollständiger Induktion.

a), b)

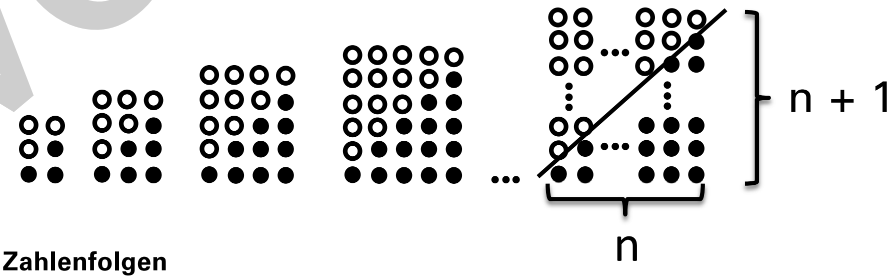
Bei einer rekursiven Bestimmung der Punkte in den Bildern ergibt sich die Anzahl der Punkte im nächsten Bild immer aus der Anzahl der Punkte im vorangegangenen Bild.



Bei der expliziten Bestimmung können die Punkte direkt angegeben werden. So gilt etwa:

$$\Delta_5 = \frac{5\cdot(5+1)}{2} = 15; \Delta_6 = \frac{6\cdot(6+1)}{2} = 21; \Delta_{10} = \frac{10\cdot(10+1)}{2} = 55 \text{ und } \Delta_{100} = \frac{100\cdot(100+1)}{2} = 5050.$$

c) Der Term $\Delta_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für das n-te Punktbild lässt sich schließlich so deuten, dass das Dreieck verdoppelt wird und an das ursprüngliche Dreieck angelegt wird. Auf diese Weise erhält man ein Rechteck der Länge n und der Breite n + 1, dessen Punktanzahl halbiert werden muss. Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass Ihre Schüler die Struktur des allgemeinen Bildes verbal beschreiben und mithilfe des Terms interpretieren.

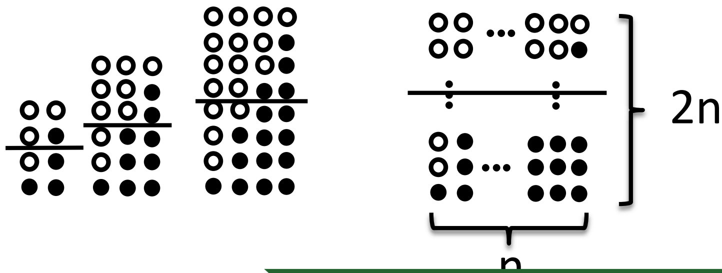


Muster in Zahlenfolgen

In einem nächsten Schritt vollziehen die Schüler den Beweis für den folgenden Zusammenhang nach:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Anschaulich gesprochen wird beim Beweis jeder Summand verdoppelt, das Prinzip ist dem der ersten Aufgabe ähnlich. Die Schüler visualisieren nun – umgekehrt – diesen Beweisgang mit einem Punktbild.



M 2 So funktioniert das Verfahren der vollständigen Induktion!

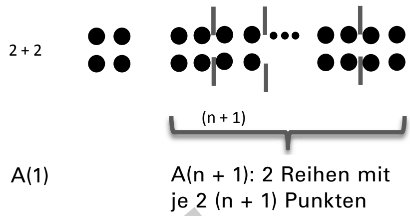
Nachdem die Schüler die Beispiele durchgearbeitet haben, nutzen sie die vollständige Induktion in einem einfachen Fall. Dazu zeigen sie mittels vollständiger Induktion, dass die Summe zweier gleicher gerader Zahlen durch 4 teilbar ist und nutzen die folgende Struktur:

A(n): $2n + 2n = 4n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar

A(1): $2 + 2 = 4$; $4 : 4 = 1$

A(n + 1): $2\,(n + 1) + 2\,(n + 1) = 2n + 2 + 2n + 2 = 4n + 4 = 4\,(n + 1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar

Weil auch 4 (n + 1) ein Vielfaches von 4 ist, ist die Aussage bewiesen. Dies lässt sich auch sehr anschaulich an einem Punktbild visualisieren.



M 3 Muster finden und mit vollständiger Induktion begründen

Ihre Schüler bearbeiten zunächst den Informationstext zur allgemeinen Struktur der vollständigen Induktion. In einer anschließenden Partnerarbeit werden Ihre Schüler kreativ:

Sie finden zunächst eigene Zahlenfolgen, visualisieren diese anschließend und begründen sie mittels vollständiger Induktion. Achten Sie bei der Partnerarbeit darauf, dass Ihre Schüler ausschließlich die gefundenen Muster selbst austauschen und den jeweiligen Beweis zunächst bei sich behalten. Erst wenn im zweiten Schritt der Partner die **Allgemeingültigkeit des Musters** bewiesen hat, können auch die zuvor erstellten Beweise ausgetauscht werden.

Nutzen Sie das anschließende Unterrichtsgespräch dazu, unterschiedliche **Begründungsvarianten** sowie **Schwierigkeiten** und **Merkhilfen** zu thematisieren. Besonders wichtig ist in diesem Zusammenhang die Frage, wann genau eine Aussage im Induktionsschritt A(n + 1) als bewiesen gelten kann.

M 4 Aufgabenkartei und Lösungskartei

Ihre Schüler arbeiten eigenständig mit der Aufgabenkartei sowie mit der Lösungskartei. Kopieren Sie die Karten etwa in einer fünffachen Auflage. Laminieren Sie die Karten und scheiden Sie sie entsprechend zu.

Ihre Schüler ziehen dann Aufgabenkärtchen und lösen die jeweiligen vier Aufgaben. Alle, die das gleiche Tier gezogen haben („Katze", „Hund" etc.), arbeiten in der gleichen Gruppe. Für den praktischen Einsatz empfiehlt es sich, dass Ihre Schüler Aufgabe für Aufgabe bearbeiten, dann jeweils die Lösung in der Lösungskartei zum Vergleich heranziehen, bevor sie zur nächsten Aufgabe schreiten.

Eine methodisch besonders interessante Variante für den Unterricht sieht so aus, dass die Schüler nicht ihre eigenen Aufgaben kontrollieren, sondern dass sie dies in Paaren jeweils wechselseitig tun. Gerade beim Nachvollziehen und bei der Kontrolle fremder Lösungen können wichtige **Reflexionsprozesse** angeregt werden. An den Kontrollstationen im Klassenzimmer finden sich so immer zwei Schüler zusammen, die ihre Bearbeitungen austauschen und gegenseitig – mithilfe der angegebenen Lösungshinweise aus der Lösungskartei, bei starken Kursen ggf. auch zunächst ohne diese Hinweise – korrigieren. Dies unterstützt auch die **Eigenverantwortlichkeit** der Schüler für ihren Lernprozess.