3. Tangente durch kurvenfernen Punkt – Normale

Abi

2004 1c, 2008 1.1b, 2012 1c, 2016 1.2

Dieser Aufgabentyp stellt die schwierigere Variante zur Tangente in einem gegebenen Berührpunkt dar. Rechnerisch gehen wir genauso vor. Solange der Berührpunkt aber noch nicht bekannt ist, rechnen wir mit $B\left(u \mid f(u)\right)$.

Zur Lösung solch einer Tangentenaufgabe benötigen wir die allgemeine Tangentenformel

$$y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$$

Exemplarische Beispielaufgabe **Abi BW 2008 1.1b**

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.

Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125$ im Bereich $-2{,}5 \le x \le 5$,

dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).

In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt.

Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.

Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

Lösungsweg

Viganella der erste Ort weltweit, der seit 2006 im Winter über gespiegeltes Sonnenlicht verfügt.

Um diese Fragestellung überhaupt beantworten zu können, müssen wir eine Tangente durch den Tiefpunkt der Funktion legen, da sich dort das Dorf befindet. Die Frage nach der Höhe des Gerüsts ist die Bedingung der tangentialen Grenzsituation. Die Mindesthöhe wird durch die Grenzlage der Tangente an den Bergrücken bestimmt. Der „kurvenferne“ Punkt ist also hier der Tiefpunkt T(0|–3,125), da er nicht den Berührpunkt darstellt.

Zunächst wird die allgemeine Tangentenformel aufgestellt: $y = f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

Nun wird der kurvenferne Punkt T(0|–3,125) für x und y eingesetzt:

$$-3{,}125 = f'(u)\cdot(0-u)+f(u)$$

Auflösen nach Null ergibt $0 = f'(u)\cdot(0-u)+f(u)+3{,}125$