2. Wachstum allgemein beschränkt beliebig

– Differenzialgleichung, Änderungsrate, Mittelwert

Abi

2004 3.1c, 2005 1.1,3, 2006 3, 2007 1,3, 2008 3, 2009 3, 2011 2.1,3,
2012 3, 2013 2.1, 2014 2.1, 2015 2.1, 2016 2.1

Das Thema abnehmendes oder zunehmendes Wachstum wird häufig mithilfe einer Euler-Funktion $f(t)=e^t$ beschrieben.

In den letzten Jahren gibt es eine zunehmende Tendenz keine Bestandsfunktion vorneweg zu stellen, sondern die gegebene Funktion $f(t)$ als Änderungsrate eines zugehörigen Bestandes zu bezeichnen. Um dann den Gesamtbestand zu erhalten, muss die gegebene Funktion integriert werden, das heißt, die Stammfunktion $F(t)$ beschreibt zusammen mit dem Anfangsbestand, welcher die Integrationskonstante c festlegt, den Gesamtbestand.

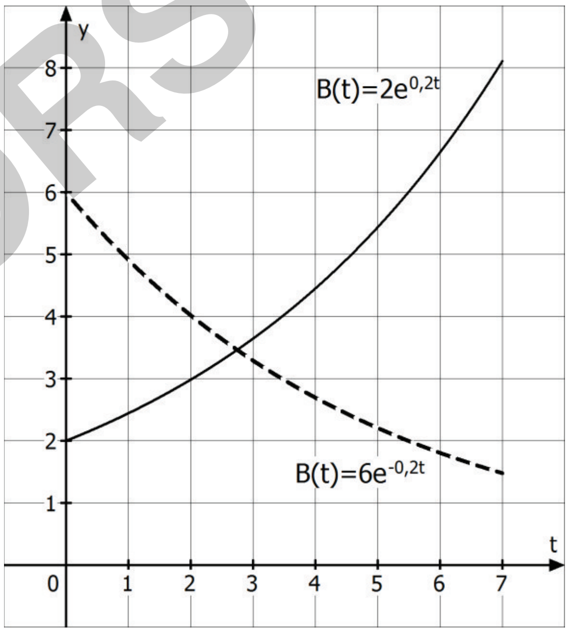
In den Funktionen, die ein Wachstum beschreiben, wird für die Variable meistens t anstelle x verwendet, da der Bestand oder die Änderungsrate eines Bestandes von der Zeit t (time) abhängt.

Die Abiaufgaben zum Thema Wachstum lassen sich in 4 Funktionsmodelle unterteilen:

1. Modell des exponentiellen Wachstums

Der Bestand $B(t)$ lässt sich mit $B(t)=B(0)\cdot e^{kt}$ beschreiben, dabei kann $B(t)$ fallend oder steigend sein.

Skizze:



Dabei ist $B(0)$ der Ausgangsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ und k wird als Wachstumsfaktor bezeichnet, der meist sehr klein ist, da er die große Basis e ausgleichen muss.

1. Ableitung: $B'(t) = B(0) \cdot k \cdot e^{kt} = k \cdot B(0) \cdot e^{kt}$
Ersetzt man $B(0) \cdot e^{kt}$ wieder durch B(t), ergibt sich $B'(t) = k \cdot B(t)$

$B'(t) = k \cdot B(t)$ bezeichnet man als Differenzialgleichung von $B(t)$.

In einer Differenzialgleichung wird die Abhängigkeit der Änderungsrate $B'(t)$ vom Bestand $B(t)$ zum Ausdruck gebracht, ohne zu wissen, welcher Term $B(t)$ beschreibt.

Auflösung von $B'(t) = k \cdot B(t)$ nach k: $k = \frac{B'(t)}{B(t)}$.
Das bedeutet, dass sich die Änderungsrate zum Bestand proportional verhält.

Differenzialgleichung und 1. Ableitung meinen beide die Änderungsrate $B'(t)$ einer Bestandsfunktion $B(t)$.
Nur in der Differenzialgleichung ist der Term für $B(t)$ noch nicht bekannt. Da sich die e-Funktion
beim Integrieren und beim Ableiten nicht ändert, ist $B(t)$ zur Beschreibung einer Differenzialgleichung geeignet.
Deshalb heißt hier $B(t)$ **Lösungsfunktion** der Differenzialgleichung $B'(t) = k \cdot B(t)$.

Das Modell des exponentiellen Wachstums ist für zukünftige Abiaufgaben unwahrscheinlich.
Ein beschränktes Wachstum gibt da wesentlich mehr her.

2. Exemplarische Beispielaufgabe Abi BW 2005 3.2

Hinweis im Aufgabentext zur Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums

Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische.
In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zu Anzahl der noch Platz findenden Fische ist.
Anfangs befinden sich 4000 Fische im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.
Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Beschreiben Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische in dem Teich vorhanden?
Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind?

Lösungsweg

Der 1. Satz im Text zeigt die Schranke nach oben auf. Allein durch die Angabe einer Schranke kann man aber noch nicht das Modell des beschränkten Wachstums annehmen, da nicht geklärt ist, wie sich der Fischbestand bis zur Schranke entwickelt.

Der 2. Satz im Text liefert den entscheidenden Hinweis über die Proportionalität des Vorgangs. Dies zeigt nur die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums (siehe Kapitel oben).

Eine zugehörige Differenzialgleichung $B'(t)$ für den Fischbestand $B(t)$ ist also:

$B'(t) = k \cdot \left(7000 - B(t)\right)$, der Wachstumsfaktor k kann noch nicht angegeben werden.
Die Funktion, die den Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, stellt $B(t)$ da:

Allgemein: $B(t) = S - c \cdot e^{-kt}$
Hier: $B(t) = 7000 - c \cdot e^{-kt}$

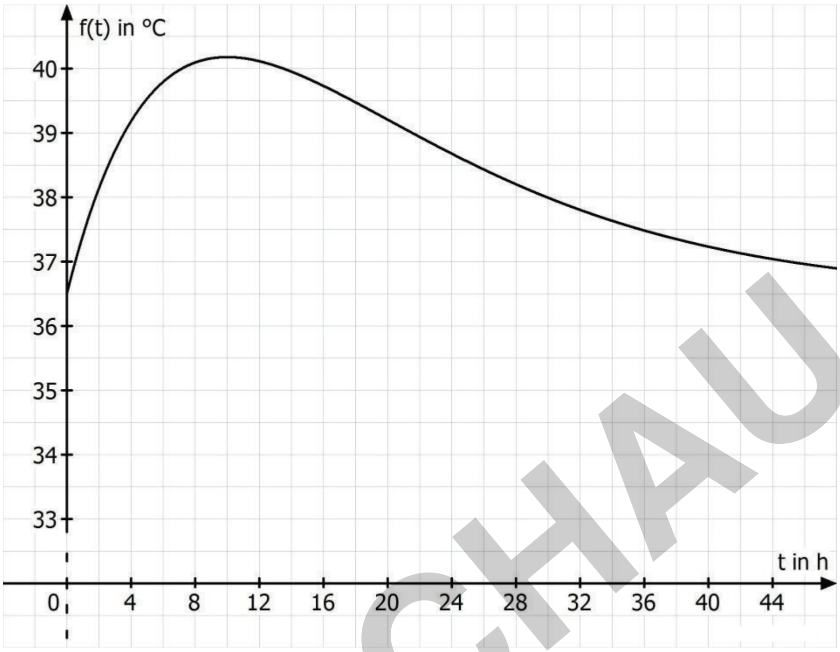
Aus dem Text entnimmt man: $B(0) = 4000$ und $B(1) = 4400$:
Mit $B(0) = 4000$: $4000 = 7000 - c \cdot e^{-k \cdot 0} \Leftrightarrow c = 3000$
Mit $B(1) = 4400$: $4400 = 7000 - 3000 \cdot e^{-k \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{-2600}{-3000} = e^{-k} \Leftrightarrow k = 0{,}143$
Damit ergibt sich $B(t) = 7000 - 3000 \cdot e^{-0{,}143 \cdot t}$

5000 Fische: $5000 = 7000 - 3000 \cdot e^{-0{,}143 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{-2000}{-3000} = e^{-0{,}143 \cdot t} \Leftrightarrow \frac{\ln\frac{2}{3}}{-0{,}143} = t \Leftrightarrow t = 2{,}83$

Nach 2,83 Monaten sind 5000 Fische im Teich.

Lösungsweg

a)



Mit dem GTR berechnet man den Hochpunkt der Funktion. Nach 10 Stunden hat die Temperatur mit 40,18 °C ihr Maximum erreicht.

Die Temperaturänderung wird über die Funktion $f'(t)$ beschrieben.

Das Maximum bzw. das Minimum von $f'(t)$ gibt die stärkste Zunahme bzw. die stärkste Abnahme an.

Mithilfe des GTR zeichnet man das Schaubild von $f'(t)$ und lässt sich deren Extremstellen berechnen.

Das Maximum, also die stärkste Zunahme, existiert gleich zu Beginn bei t = 0.

Das Minimum, also die stärkste Abnahme, existiert nach t = 20 Stunden.

b)

Die Körpertemperatur ist genau 37°C, wenn $36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t} = 37°C$ erfüllt ist.

Mithilfe des GTR gibt es 2 Werte für t. Nur der 2. Wert t = 45 Stunden ist interessant, da hier die Temperatur für t > 45 Stunden unter 37°C fällt.

Beim 1. Wert steigt ja die Körpertemperatur über 37°C an.

2. Exemplarische Beispielaufgabe Abi BW 2007 3

Die momentane Ankunftsrate an einem Kino – also die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute – soll modellhaft beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0,27 \cdot x^2 \cdot e^{-0,12x}$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19.00 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.
Vor 19.00 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kartenschalter.

a)
Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Wann kommen die meisten Besucher pro Minute zum Kartenschalter, wie viele sind das?
Ab wann kommen weniger als drei Personen pro Minute zum Kino?

b)
Zeigen Sie, dass die Anzahl der angekommenen Personen durch die Funktion g mit
$g(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x}$ beschrieben wird.
Wie viele Personen kommen nach diesem Modell höchstens zum Kino?

c)
Um 19.20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können durchschnittlich für 6 Personen Karten ausgegeben werden.
Mit welcher Wartezeit muss eine Person rechnen, die um 19.20 Uhr zum Kino kommt?
Wann ist die Anzahl der Wartenden am größten?
Wie viele Besucher warten dann?
Wann hat sich die Warteschlange aufgelöst?

d)
Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19.50 Uhr.
Wie viele Personen müssen jetzt mindestens pro Minute am Schalter abgefertigt werden, damit die Schlange um 20.30 Uhr abgebaut ist?