Körperberechnung
(mit Bastelanleitung für Pop-Up-Modelle)

Inhaltsverzeichnis

KOHL VERLAG Pop-up-Modelle – Basteln von Körpern - Bestell-Nr. P12 006

Vorbemerkungen

Oftmals tun sich Schülerinnen und Schüler schwer mit Aufgaben, die das räumliche Vorstellungsvermögen und das perspektivische Sehen ansprechen. Ich erinnere mich noch gut an ein Mädchen, dass beim Anblick meines Tafelbildes einer perspektivisch gezeichneten Pyramide empört ausrief: „Ich glaub´, ich hab´ was mit den Augen! Wo ist denn da ein rechter Winkel?”
Sicherlich ist wohl jede Schule im Besitz von Modellen aller gängigen Körper, die im Bereich der Stereometrie der Sekundarstufe I behandelt werden.
Diese vorfabrizierten Modelle dienen lediglich der Demonstration.
Ein größerer erzieherischer Wert liegt zweifelsohne darin, dass jeder Schüler und jede Schülerin im Besitz eines Modelles ist, dass im Unterricht besprochen werden kann.
Weil aber gebastelte Modelle selten einen Transport nach Hause oder zur Schule überstehen, bin ich Herrn Prof. Dr. Lörcher und Herrn Rümmele dankbar für die Erlaubnis, ihre bei einem Worshop in Olpe vorgestellten Pop-Up-Modelle veröffentlichen zu dürfen.
Sie wurden geringfügig geändert und durch weitere Modelle ergänzt.
Besonders hingewiesen sei auf die Pyramidenmodelle (Seite 34 f.), wo deutlich an »ausgenommenen« Pyramiden zu erkennen ist, wo ein rechter Winkel ist und wie sich der Satz des Pythagoras anwenden lässt.
Pop-Up-Modelle haben den Vorteil, dass sie sich ohne viel Platzaufwand transportieren lassen. Man kopiert die Vorlagen - entweder Modelle mit Lösungen oder ohne Lösungen - auf Karton (160 g-Papier) und schneidet die Netze entsprechend aus, wobei besondere Rücksicht auf die Schneidelinien und Falzlinien zu nehmen ist.
Im Anschluss daran wird Klebstoff auf die nicht hochzuklappenden Teile gebracht und mit einem weiteren kartonierten Blatt verklebt.
Wenn man die Modelle jetzt in der Mitte knifft, nehmen die einzelnen Pop-Up-Modelle nicht mehr Platz ein als ein DIN A 5-Blatt.
Besonders vorteilhaft bei diesen Pop-Up-Modellen ist, dass Schülerinnen und Schülern permanent der Übergang von der Fläche (Netz des Körpers) zum Körper, der etwas aufnehmen kann, bewusst gemacht werden kann.
Wer sich nicht die Mühe des Kopierens machen möchte, der kann den zu diesem Band erschienenen Bastelblock, bei dem die Modelle auf DIN A4-Format vergrößert wurden und sowohl die Vorder- als auch die Rückseite bedruckt sind, käuflich erwerben. Allerdings stimmen dann die in diesem Band benutzten Maße nicht mehr und müssen auf die Maße des Bastelblocks abgestimmt werden.

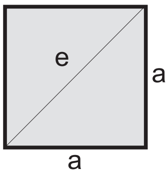
Viel Spaß und Erfolg beim Einsatz der Pop-Up-Modelle wünschen Ihnen der Kohl-Verlag und Hans J. Schmidt

Pop-up-Modelle – Basteln von Körpern - Bestell-Nr. P12 006

Formelsammlung

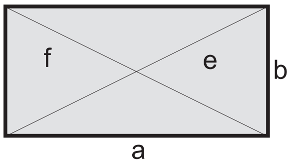
Den **Umfang** eines **Quadrates** berechnest du so: $u = a + a + a + a = 4 \cdot a$

Den **Flächeninhalt** eines **Quadrates** berechnest du so: $A = a \cdot a = a^2$ $A = \frac{e^2}{2}$



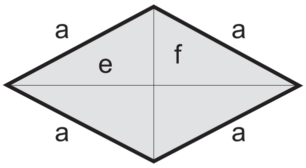
Den **Umfang** eines **Rechtecks** berechnest du so: $u = a + b + a + b = 2 \cdot (a + b)$

Den **Flächeninhalt** eines **Rechtecks** berechnest du so: $A = a \cdot b$



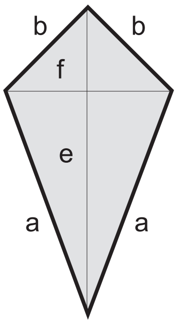
Den **Umfang** einer **Raute** berechnest du so:
$u = a + a + a + a = 4 \cdot a$

Den **Flächeninhalt** einer **Raute** berechnest du so:
$A = \frac{e \cdot f}{2}$



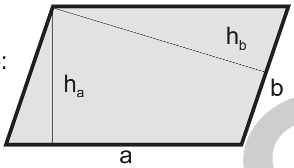
Den **Umfang** eines **Drachens** berechnest du so:
$u = a + b + a + b = 2 \cdot (a + b)$

Den **Flächeninhalt** eines **Drachens** berechnest du so:
$A = \frac{e \cdot f}{2}$



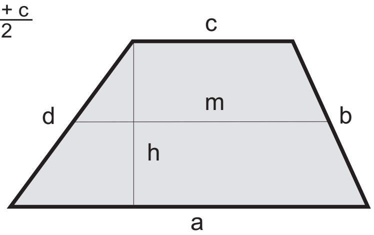
Den **Umfang** eines **Parallelogramms** berechnest du so: $u = a + b + a + b = 2 \cdot (a + b)$

Den **Flächeninhalt** eines **Parallelogramms** berechnest du so:
$A = a \cdot h_a$ oder $A = b \cdot h_b$



Den **Umfang** eines **Trapezes** berechnest du so:
$u = a + b + c + d$

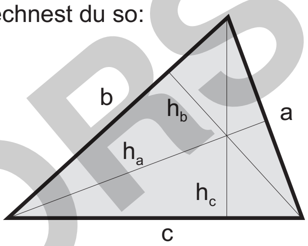
Den **Flächeninhalt** eines **Trapezes** berechnest du so:
$A = m \cdot h$ mit $m = \frac{a + c}{2}$
$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$



Den **Umfang** eines **Dreiecks** berechnest du so:
$u = a + b + c$

Den **Flächeninhalt** eines **Dreiecks** berechnest du so:
$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $A = \frac{a \cdot h_a}{2}$ $A = \frac{b \cdot h_b}{2}$

$A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{zugehöriger Höhe}}{2}$



*Spezialformel für das **rechtwinklige Dreieck**:*

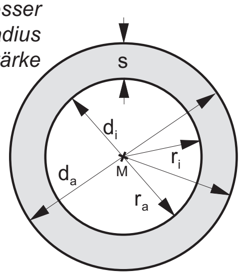
$A = \frac{a \cdot b}{2}$ (a und b sind Katheten)

*Spezialformel für das **gleichseitige Dreieck**:*

$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

d_i Innendurchmesser, d_a Außendurchmesser
d_i heißt auch lichter Durchmesser
r_i Innenradius, r_a Außenradius
s Wandstärke

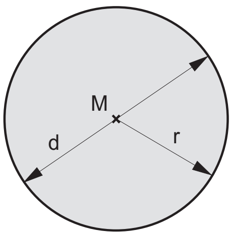
Den Flächeninhalt eines **Kreisrings** berechnest du so:
$A = r_a^2 \cdot \pi - r_i^2 \cdot \pi$
$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$
$A = (r_a + r_i) \cdot (r_a - r_i) \cdot \pi$



Den **Umfang** eines **Kreises** berechnest du so: $u = 2 \cdot r \cdot \pi$ oder $u = d \cdot \pi$

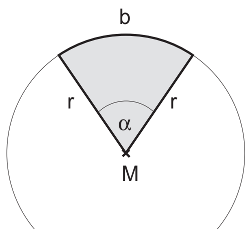
Den **Flächeninhalt** eines **Kreises** berechnest du so:
$A = r^2 \cdot \pi$ oder $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

M Mittelpunkt des Kreises
d Durchmesser
r Radius



Den **Umfang** eines **Kreisausschnitts** berechnest du so:
$u = 2 \cdot r + b$ und $b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$

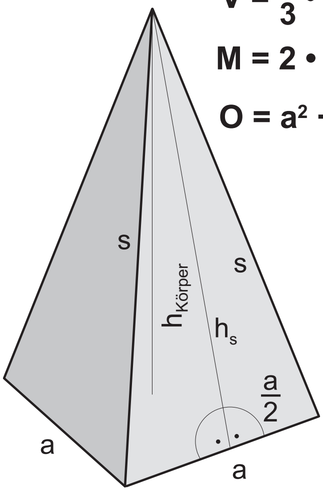
Den **Flächeninhalt** eines Kreisauschnitts berechnest du so:
$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$



Formelsammlung

Volumen und Oberfläche Pyramide, Kegel, Kugel

Pyramiden

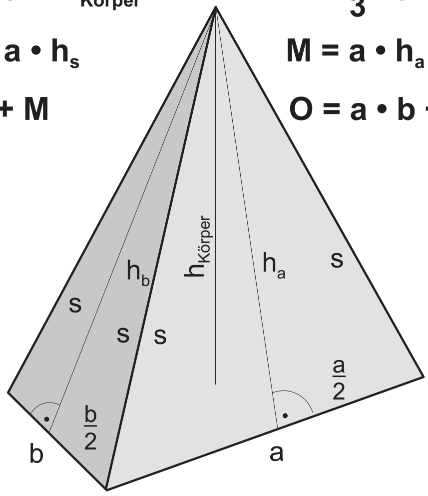


$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h_{Körper}$

$M = 2 \cdot a \cdot h_s$

$O = a^2 + M$

Grundfläche Quadrat

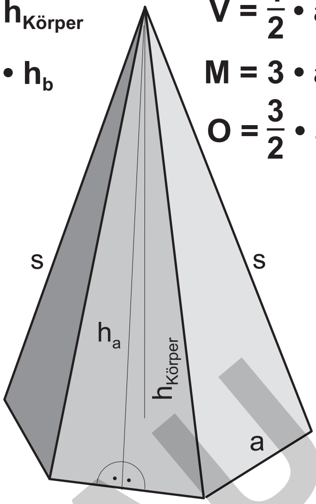


$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h_{Körper}$

$M = a \cdot h_a + b \cdot h_b$

$O = a \cdot b + M$

Grundfläche Rechteck



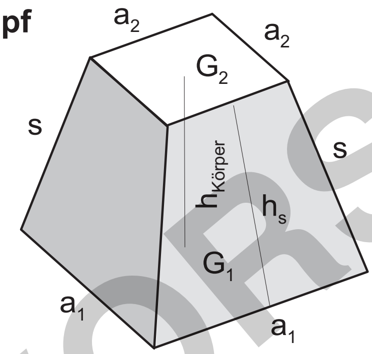
$V = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot h_{Körper}$

$M = 3 \cdot a \cdot h_a$

$O = \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} + M$

Grundfläche regelmäßiges Sechseck

Pyramidenstumpf

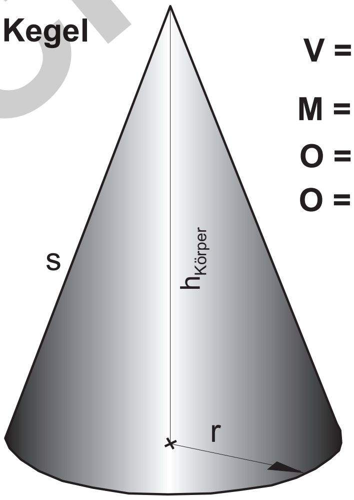


$V = \frac{1}{3} \cdot h_{Körper} \cdot (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2)$

$M = 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot h_s$

$O = G_1 + G_2 + M$

Kegel



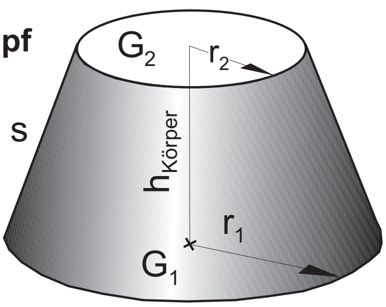
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{Körper}$

$M = \pi \cdot r \cdot s$

$O = \pi \cdot r \cdot s + \pi \cdot r^2$

$O = \pi \cdot r \cdot (s + r)$

Kegelstumpf

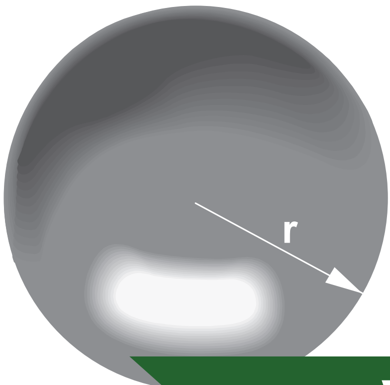


$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_{Körper} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$

$M = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$

$O = r_1^2 \cdot \pi + r_2^2 \cdot \pi + M$

Kugel



$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Pop-up-Modelle – Basteln von Körpern - Bestell-Nr. P12 006

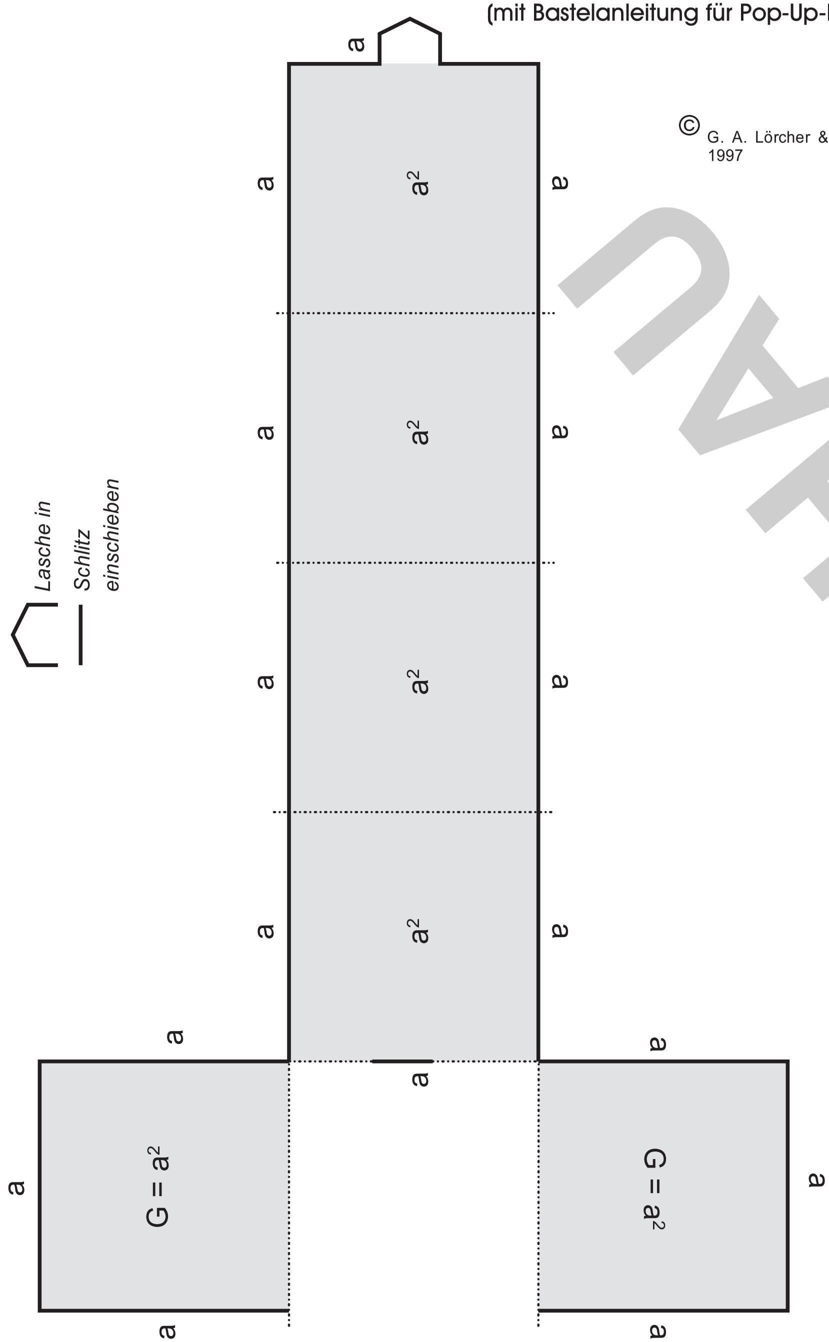
Körperberechnung

(mit Bastelanleitung für Pop-Up-Modelle)

Faltlinie

Schneidelinie

Lasche in Schlitz einschieben



Würfel

Oberfläche = 2 • Grundfläche + Mantel	Volumen = Grundfläche • Körperh
$O = 2 \cdot G + M$	$V = G \cdot h_{Körper}$
$O = 2 \cdot a^2 + 4a^2 = 6a^2$	$V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Beispiele:

Gegeben: a = 3,3 cm
Gesucht: O
Ansatz:

Antwort:

Gegeben: a = 3,3 cm
Gesucht: V
Ansatz:

Antwort:

Gegeben: O = 65,3 cm²
Gesucht: a
Ansatz:

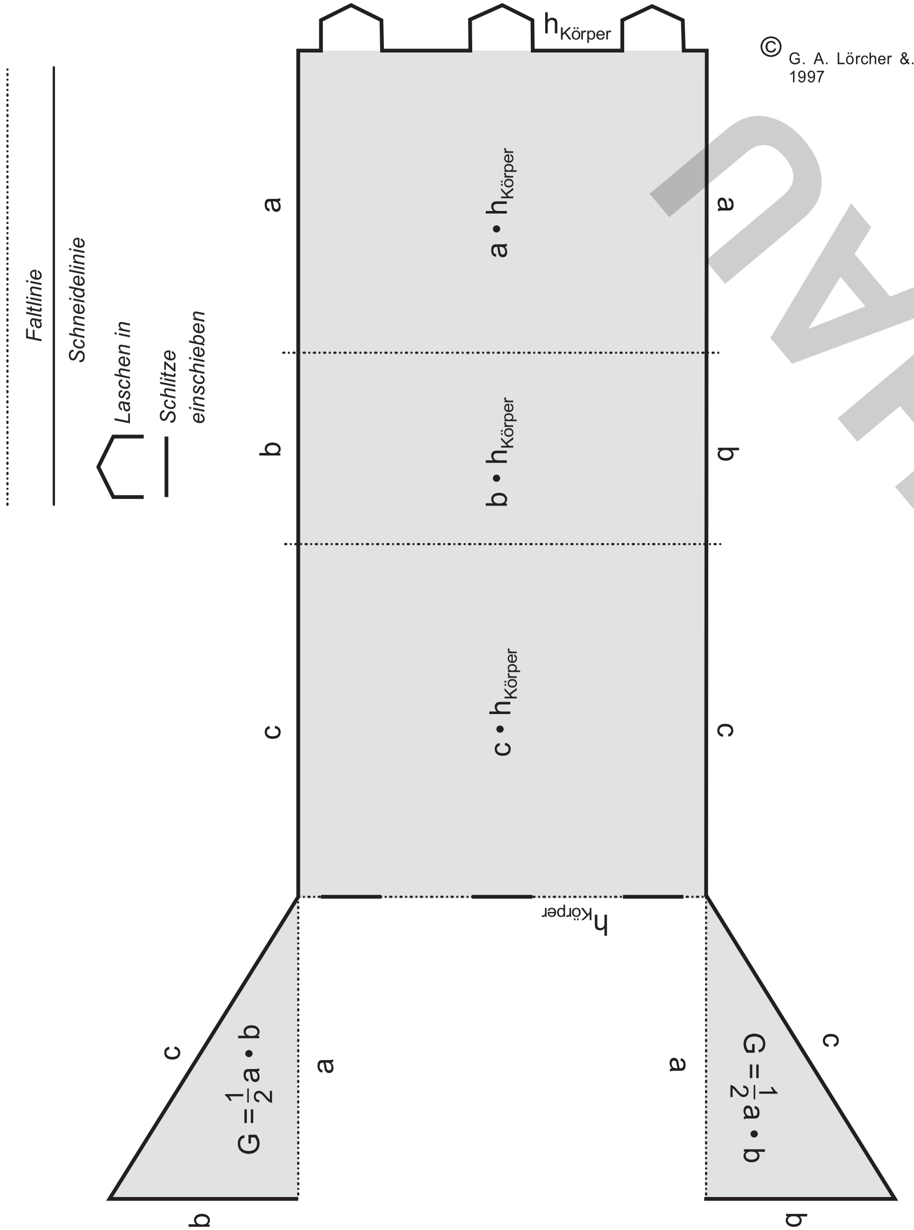
Antwort:

Gegeben: V = 35,9 cm³
Gesucht: a
Ansatz:

Antwort:

Körperberechnung

(mit Bastelanleitung für Pop-Up-Modelle)



rechtwinkliges Dreiecksprisma

Oberfläche = 2 • Grundfläche + Mantel	**Volumen = Grundfläche • Körperh**
$O = 2 \cdot G + M$ $M = u \cdot h_{Körper}$ $O = 2 \cdot \frac{1}{2} ab + (a + b + c) \cdot h_{Körper}$ $O = ab + (a + b + c) \cdot h_{Körper}$	$V = G \cdot h_{Körper}$ $V = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h_{Körper}$

Beispiele:

Gegeben: a = 4 cm
b = 2,5 cm
$h_{Körper}$ = 5,4 cm

Gesucht: O
Ansatz:

Antwort:

Gegeben: a = 4 cm
b = 2,5 cm
$h_{Körper}$ = 5,4 cm

Gesucht: V
Ansatz:

Antwort:

Gegeben: a = 4 cm
b = 2,5 cm
O = 70,5 cm²

Gesucht: $h_{Körper}$
Ansatz:

Antwort:

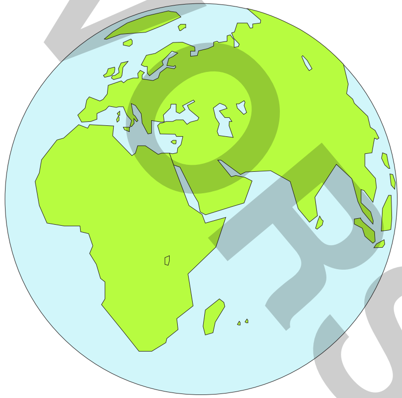
Gegeben: a = 4 cm
b = 2,5 cm
V = 27 cm³

Gesucht: $h_{Körper}$
Ansatz:

Antwort:

***

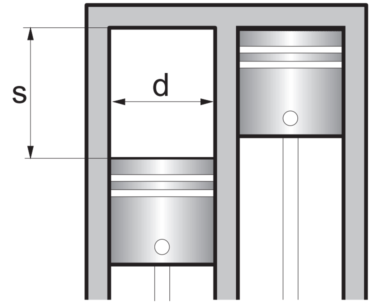
Ein innen hohler Globus mit einem äußeren Durchmesser von d = 30 cm ist aus Presspappe (spezifisches Gewicht $0{,}7\,\frac{g}{cm^3}$) hergestellt und wiegt 600 g. Wie dick ist die Wandstärke des Globus?



Aufgabe Nr. 3 Körperberechnungen

**

Im Motor bezeichnet man den zylindrischen Raum, der sich zwischen der höchsten und niedrigsten Kolbenstellung befindet, als Hubraum.
s ist die Abkürzung für Hub, die Länge des Weges, die der Kolben vom oberen bis zum unteren Punkt zurücklegt.
Ein »Bastler« schleift die sechs Zylinderbohrungen seines Wagens von 79 mm auf 80,5 mm Durchmesser aus. Der Hub von 100 mm bleibt unverändert.
Um wie viel cm³ hat sich der Hubraum erhöht?



Aufgabe Nr. 4 Körperberechnungen

Lösung Nr. 3 Körperberechnungen

LÖSUNG

Masse = Volumen • spezifisches Gewicht

$r_a = 15$ (cm)

r_i gesucht und Wandstärke s

$\ldots \cdot \pi \cdot (15^3 - r_i^3) \cdot 0{,}7 = 600$

$15^3 - r_i^3 = \frac{600 \cdot 3}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}7}$

$r_i^3 = 15^3 - \frac{600 \cdot 3}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}7}$

$r_i^3 = 3170{,}37$

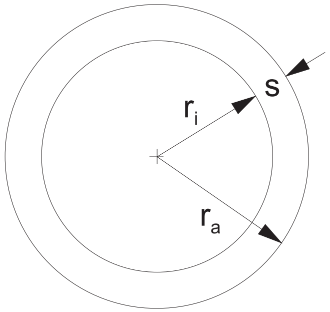
$r_i = \sqrt[3]{3170{,}37}$

$r_i \approx 14{,}7$ (cm)

$s = r_a - r_i$

$s = 0{,}3$ (cm)

Die Wandstärke beträgt 3 mm.



Lösung Nr. 4 Körperberechnungen

LÖSUNG

Berechnung Hubraum_{alt}

$V_{alt} = r_1^2 \cdot \pi \cdot h_{Körper}$

$V_{alt} = 39{,}5^2 \cdot \pi \cdot 100$

$V_{alt} \approx 490167$ (mm³)

Berechnung Hubraum_{neu}

$V_{neu} = r_2^2 \cdot \pi \cdot h_{Körper}$

$V_{neu} = 40{,}25^2 \cdot \pi \cdot 100$

$V_{neu} \approx 508958$ (mm³)

$V_{Differenz} = V_2 - V_1$

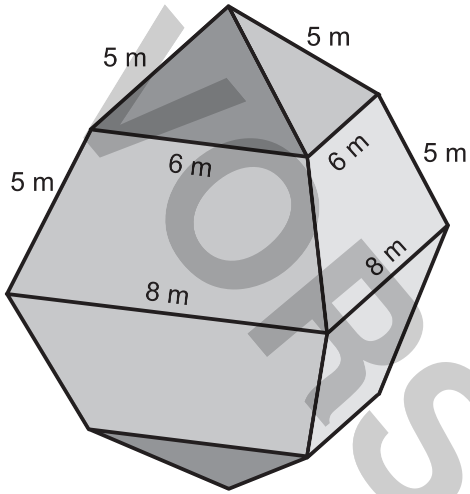
$V_{Differenz} = 18791$ (mm³)

$V_{Differenz} = 18{,}8$ (cm³)

Bei sechs Zylindern erhöht sich der Hubraum um 112,8 cm³.

****

Berechne Oberfläche und Volumen des abgebildeten Körpers.



Aufgabe Nr. 7 Körperberechnungen

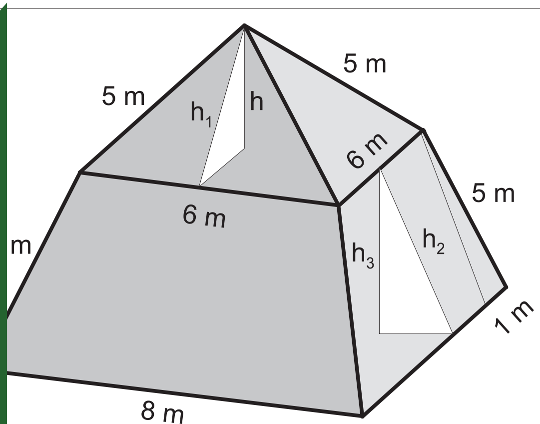
*

Die innere Röhre einer U-Bahn ist halbkreisförmig mit einem Durchmesser von 8,35 m.
Die Wandung besteht aus einer 1,20 m dicken Betonschicht.
Wie viel m³ Beton sind zu verfüllen, wenn der Tunnel 100 m lang ist?

Aufgabe Nr. 8 Körperberechnungen

Lösung Nr. 7 Körperberechnungen

LÖSUNG



Berechnung h_1

$h_1 = \sqrt{5^2 - 3^2}$
$h_1 = 4$ (m)

Berechnung h

$h = \sqrt{4^2 - 3^2}$
$h \approx 2{,}65$ (m)

Berechnung h_2

$h_2 = \sqrt{5^2 - 1^2}$
$h_2 \approx 4{,}9$ (m)

Berechnung h_3

$h_3 = \sqrt{4{,}9^2 - 1^2}$
$h_3 \approx 4{,}8$ (m)

$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 2{,}65 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4{,}8 \cdot (8^2 + 8 \cdot 6 + 6^2)$

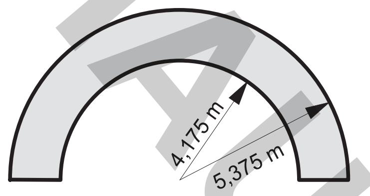
$= 537{,}2$ (cm³)

$= 8 \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} + 8 \cdot \frac{8 + 6}{2} \cdot 4{,}9$

$= 370{,}4$ (cm²)

Lösung Nr. 8 Körperberechnungen

LÖSUNG



$A = \frac{(5{,}375^2 - 4{,}175^2) \cdot \pi}{2}$

$A = 18{,}00$ (m²)

$V = A \cdot h_{Körper}$

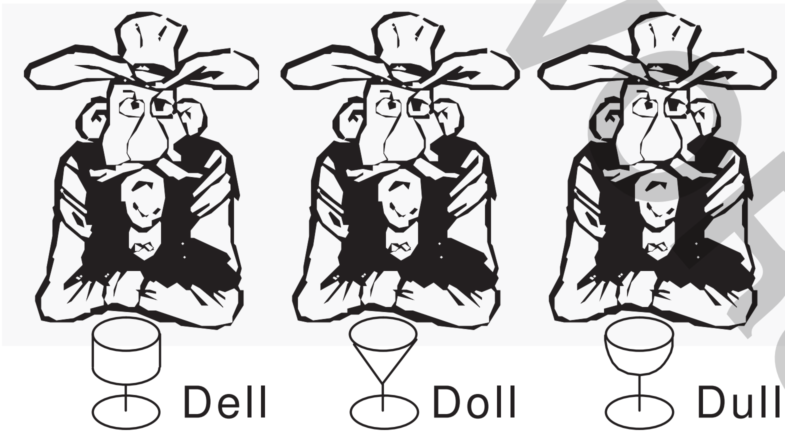
$V = 18 \cdot 100$

$V = 1800$ (m³)

Es müssen 1800 m³ Beton verfüllt werden.

**

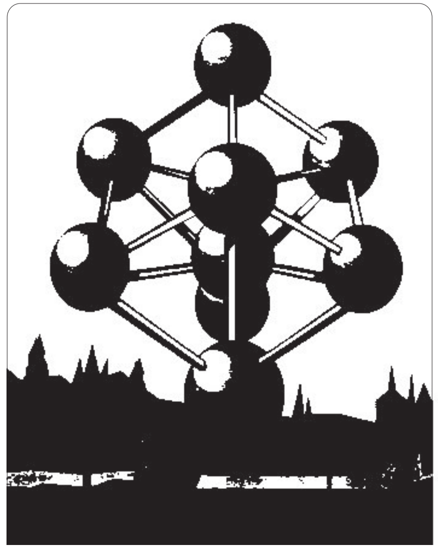
Die Drillinge Dell, Doll und Dull genehmigen sich im Saloon „Zum dirty Meineid" oftmals einen Whiskey aus unterschiedlich geformten Gläsern, die alle einen Durchmesser von 6 cm haben und 3 cm hoch sind. In welchem Verhältnis muss der Barkeeper Simple Simon die Preise berechnen?



Aufgabe Nr. 19 Körperberechnungen

**

Das Atomium in Brüssel besteht aus neun „sogenannten" Sphären, die einen Durchmesser von 18 m haben.
Berechne das Volumen dieser neun Sphären.
Der Gebäudereiniger Alois Schrubbmal erhält den Auftrag, die Oberfläche aller neun Sphären zu reinigen. Pro m² werden 7,50 € in Rechnung bestellt.
In welcher Höhe muss Alois Schrubbmal eine Rechnung ausstellen?



Aufgabe Nr. 20 Körperberechnungen

Lösung Nr. 19 Körperberechnungen

LÖSUNG

$V_{Zylinder} = 3^2 \cdot \pi \cdot 3$

$V_{Zylinder} = 84{,}8\ (cm^3)$

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \pi \cdot 3$

$V_{Kegel} = 28{,}3\ (cm^3)$

$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot 3^3 \cdot \pi$

$V_{Halbkugel} = 56{,}5\ (cm^3)$

Der Barkeeper Simple Simon muss die Preise im Verhältnis 3 : 1 : 2 berechnen. Dull muss das Doppelte von dem bezahlen, was Doll zahlt, Dell muss dreimal so viel bezahlen wie sein Zwillingsbruder Doll.

Lösung Nr. 20 Körperberechnungen

LÖSUNG

$V_{Sphären} = \frac{4}{3} \cdot 9^3 \cdot \pi \cdot 9$

$V_{Sphären} \approx 27482{,}7\ (m^3)$

$O_{Sphären} = 4 \cdot 9^2 \cdot \pi \cdot 9$

$O_{Sphären} \approx 9161\ (m^2)$

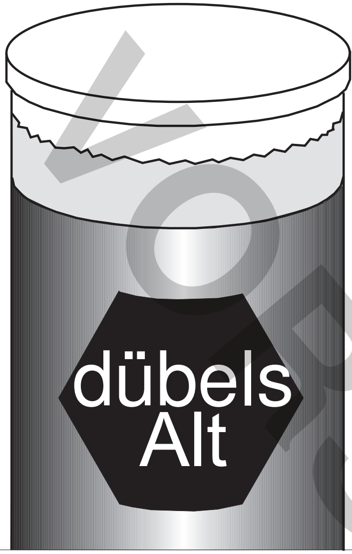
$Rechnung_{Sphären} = 68707{,}50\ (€)$

Alois Schrubbmal stellt eine Rechnung über 68707,50 € aus.

Karteikarten zum Ausschneiden

**

Eine Litfaßsäule - eine Anschlagsäule, die zuerst von dem Drucker E. Litfaß am 1. 7. 1855 in Berlin als Werbemedium aufgestellt wurde - hat einen äußeren Durchmesser von 1,16 m und eine Wandstärke von 6 cm. Sie ist 2,60 m hoch. Die Dübels-Brauerei will für ein Preisausschreiben wissen, wie viel Gläser Altbier zu 0,2 l sich ausschenken ließen, wenn die Säule bis zum Rand mit Altbier gefüllt wäre.



Aufgabe Nr. 33 Körperberechnungen

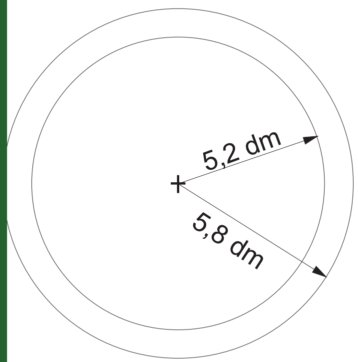
***

Die Firma Hengstenzwerg, die das küchenfertige „Wilde Weinsauerkraut Mitesser" produziert, erteilt einer Druckerei den Auftrag, die Papierumhüllungen für 2 000 000 Dosen, die einen Inhalt von 580 mL haben, herzustellen. Die Papierstreifen sollen von den Dosenrändern je 4 mm Abstand haben und 5 mm überlappen. Die Dosen haben einen Durchmesser von 8,4 cm. Wie viel m^2 Papier werden dafür benötigt?

Aufgabe Nr. 34 Körperberechnungen

Lösung Nr. 33 Körperberechnungen

LÖSUNG



$V = r^2 \cdot \pi \cdot h_{Körper}$

$V = 5{,}2^2 \cdot \pi \cdot 26$

$V \approx 2209$ (dm^3)

$V \approx 2209$ (l)

Aus der Säule könnte man 11045 Gläser Alt zapfen.

Lösung Nr. 34 Körperberechnungen

LÖSUNG

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h_{Körper}$

$h_{Körper} = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$

$h_{Körper} = \frac{580}{4{,}2^2 \cdot \pi}$

$h_{Körper} \approx 10{,}5$ (cm)

$A_{gesamt} = (2 \cdot 4{,}2 \cdot \pi + 0{,}5) \cdot 9{,}7 \cdot 2000000$

$A_{gesamt} \approx 521653939$ (cm^2)

$A_{gesamt} \approx 52165$ (m^2)

Für die Umhüllungen werden 52165 m^2 Papier benötigt.